



TRƯỜNG ĐẠI HỌC THỦ ĐÔ HÀ NỘI  
HANOI METROPOLITAN UNIVERSITY

# TẠP CHÍ KHOA HỌC

SCIENCE JOURNAL OF HANOI METROPOLITAN UNIVERSITY

ISSN 2354-1504

---

---

**SỐ 18 – KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ**

---

---

THÁNG 9 – 2017

# TẠP CHÍ KHOA HỌC TRƯỜNG ĐẠI HỌC THỦ ĐÔ HÀ NỘI

SCIENTIFIC JOURNAL OF HANOI METROPOLITAN UNIVERSITY

(Tập chí xuất bản định kì 1 tháng/số)

## Tổng Biên tập

Đặng Văn Soa

## Editor-in-Chief

Dang Van Soa

## Phó Tổng biên tập

Vũ Công Hảo

## Associate Editor-in-Chief

Vu Cong Hao

## Hội đồng Biên tập

Bùi Văn Quân  
Đặng Thành Hưng  
Nguyễn Mạnh Hùng  
Nguyễn Anh Tuấn  
Châu Văn Minh  
Nguyễn Văn Mã  
Đỗ Hồng Cường  
Nguyễn Văn Cư  
Lê Huy Bắc  
Phạm Quốc Sử  
Nguyễn Huy Kỳ  
Đặng Ngọc Quang  
Nguyễn Thị Bích Hà  
Nguyễn Ái Việt  
Phạm Văn Hoan  
Lê Huy Hoàng

## Editorial Board

Bui Van Quan  
Dang Thanh Hung  
Nguyen Manh Hung  
Nguyen Anh Tuan  
Chau Van Minh  
Nguyen Van Ma  
Do Hong Cuong  
Nguyen Van Cu  
Le Huy Bac  
Pham Quoc Su  
Nguyen Huy Ky  
Dang Ngoc Quang  
Nguyen Thi Bich Ha  
Nguyen Ai Viet  
Pham Van Hoan  
Le Huy Hoang

## Thư kí tòa soạn

Lê Thị Hiền

## Secretary of the Journal

Le Thi Hien

## Biên tập kĩ thuật

Phạm Thị Thanh

## Technical Editor

Pham Thi Thanh

---

*Giấy phép hoạt động báo chí số 571/GP-BTTTT cấp ngày 26/10/2015  
In 200 cuốn tại Trường ĐH Thủ đô Hà Nội. In xong và nộp lưu chiểu tháng 9/2017*

## MỤC LỤC

Trang

1. VẬT LIỆU SPINEL  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  ( $x = 0; 0.1; 0.2$ ) TỔNG HỢP BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN ỨNG PHA RẮN SỬ DỤNG LÀM ĐIỆN CỰC CATOT CHO PIN LITI – ION VỚI ANOT  $\text{SnO}_2$  ..... 5  
*Spinel of material  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  ( $x = 0; 0.1; 0.2$ ) synthesized by solid – stated method used as cathodes for lithium - ion batteries with  $\text{SnO}_2$  anode*  
**Đặng Trần Chiến, Tạ Anh Tấn, Lê Huy Sơn, Phạm Duy Long**
2. ỨNG DỤNG GIẢI THUẬT TỐI ƯU BẦY ĐÀN VÀO BÀI TOÁN CỰC TIỂU HÓA ĐỘ TRỄ ..... 15  
*Applying particle swarm optimization for minimum latency problem*  
**Lê Chí Chung**
3. CONTRIBUTION OF THE SCALAR UNPARTICLE ON PROCESS  $e^+e^- \rightarrow hh$  IN THE RANDALL-SUNDRUM MODEL ..... 25  
*Đóng góp của phi hạt vô hướng vào quá trình  $e^+e^- \rightarrow hh$  trong mô hình Randall- Sundrum*  
**Bùi Thị Ha Giang, Đào Thị Le Thuy, Dang Van Soa**
4. ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ ..... 31  
*Application of mean value theorem in problems of sequence limit*  
**Nguyễn Văn Hào, Nguyễn Thị Thanh Hà, Vũ Thị Ngọc Diệu**
5. CONTROLLED TELEPORTATION WITH PARTIALLY ENTANGLED QUANTUM CHANNEL: DETERMINISM AND POWER OF THE CONTROLLER ..... 39  
*Viễn chuyển lượng tử có điều khiển qua kênh lượng tử riêng phần rối không cục đại: tất định và quyền lực của người điều khiển*  
**Nguyễn Van Hop**
6. MỘT PHƯƠNG PHÁP ĐẶC TẢ LOGIC CHO VIỆC ĐÁNH GIÁ VÀ PHÂN TÍCH LỖ HỔNG AN NINH MẠNG ..... 46  
*Một phương pháp đặc tả logic cho việc đánh giá và phân tích lỗ hỏng an ninh mạng*  
**Trần Bá Hùng, Nguyễn Đức Giang, Bùi Thị Thu, Lưu Thị Bích Hương**
7. SIMPLE CORE-SHELL MODEL FOR A SOFT NANO PARTICLES AND VIRUS WITH ANALYTICAL SOLUTION ..... 65  
*Mô hình lõi - vỏ đơn giản cho các hạt nano mềm và virus với lời giải giải tích*  
**Phung Thi Huyen, Luong Thi Theu, Dinh Thi Thuy, Dinh Thi Ha, Nguyen Ai Viet**
8. NGHIÊN CỨU TÍNH CHẤT QUANG XÚC TÁC CỦA LỚP CHUYÊN TIẾP DỊ THỂ  $p\text{-Si}/n\text{-ZnO}/n\text{-ZnO}:\text{Sn}$  CẤU TRÚC DÂY NANO CHẾ TẠO BẰNG PHƯƠNG PHÁP THỦY NHIỆT ..... 75  
*Investigation of photocatalytic activity of  $p\text{-Si}/n\text{-ZnO}/n\text{-ZnO}:\text{Sn}$  prepared by the hydrothermal method*  
**Nguyễn Đình Lâm, Nguyễn Thị Hoa, Nguyễn Văn Hùng, Phạm Văn Vĩnh, Đặng Trần Chiến**
9. ĐÁNH GIÁ VÀ THỬ NGHIỆM THUẬT TOÁN LẬP RÁP DỮ LIỆU HỆ GEN TRONG TIN SINH HỌC ..... 81  
*Evaluating and experiment the algorithm to assemble data genome in Bioinformatics*  
**Nguyễn Văn Long**
10. AN APPROACH FOR SPECIFICATION AND VERIFICATION OF MULTI-AGENT SYSTEMS ..... 91  
*Phương pháp đặc tả và kiểm chứng các hệ đa tác tử*  
**Tran Thi Thu Phuong**

11. SỰ ẢNH HƯỞNG CỦA NHIỆT ĐỘ TRONG QUÁ TRÌNH THỦY NHIỆT TỚI VIỆC HÌNH THÀNH DÂY NANO  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  ..... 102  
*The influence of temperature during hydrothermal the formation of  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  nanowire*  
**Tạ Anh Tấn, Đặng Trần Chiến, Phạm Duy Long**
12. XỬ LÝ ION PHOTPHAT TRONG NƯỚC THẢI DÂN DỤNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP SINH HỌC - ĐỀ XUẤT MỘT SỐ BIỆN PHÁP GIẢM THIỂU ..... 112  
*Study the treatment of phosphorus ion in waste water by biological method - propose some reduction solution*  
**Đào Đình Thuận**
13.  $I^+I^- \rightarrow \gamma h$  COLLISION IN THE RANDALL – SUNDRUM MODEL ..... 120  
*Sự va chạm  $I^+I^- \rightarrow \gamma h$  trong mô hình Randall – Sundrum*  
**Đào Thị Lê Thủy, Lê Nhu Thục, Nguyễn Thị Nhung, Dang Trong Hoa**
14. VAI TRÒ CỦA SÔNG KA LONG, TỈNH QUẢNG NINH ĐỐI VỚI ẤU TRÙNG VÀ CÁ CON LOÀI *Ambassis vachellii* RICHARDSON, 1846 ..... 127  
*Importance of Kalong estuary in Quang Ninh Province for larvae and juveniles of "Ambassis vachellii" Richardson, 1846*  
**Tạ Thị Thủy, Hà Mạnh Linh, Nguyễn Hà Linh, Trần Đức Hậu**
15. GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU BẰNG PHƯƠNG PHÁP GRADIENT VÀ ỨNG DỤNG ..... 136  
*Solving the optimal problem using the Gradient method and the application*  
**Nguyễn Quốc Tuấn**
16. QUINTIC B-SPLINE COLLOCATION METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION A MODIFIED GRLW EQUATIONS ..... 148  
*Phương pháp collocation với cơ sở B-spline bậc 5 giải phương trình generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers*  
**Nguyễn Văn Tuấn**
17. TYPE 2 SOLUTIONS OF RADOM FUZY WAVE EQUANTION UNDER GENERALIZED HUKUHARA DIFERNTIABILITY ..... 157  
*Nghiệm loại 2 của phương trình truyền sóng mờ ngẫu nhiên dưới đạo hàm Hukuhara tổng quát*  
**Nguyễn Thị Kim Sơn**
18. HỆ THỐNG CHỨNG THỰC VĂN BẢN PHÁP LÝ - GIẢI PHÁP THÚC ĐẨY CHÍNH PHỦ ĐIỆN TỬ ..... 173  
*The system of legal document verification – A solution for promoting E-government*  
**Nguyễn Ái Việt**

## VẬT LIỆU SPINEL $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$ ( $x = 0; 0.1; 0.2$ ) TỔNG HỢP BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN ỨNG PHA RẮN SỬ DỤNG LÀM ĐIỆN CỰC CATOT CHO PIN LITI – ION VỚI ANOT $\text{SnO}_2$

Đặng Trần Chiến<sup>1</sup>, Tạ Anh Tấn<sup>2</sup>, Lê Huy Sơn<sup>2</sup>, Phạm Duy Long<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội

<sup>2</sup> Khoa Khoa học Tự nhiên, trường Đại học Thủ đô Hà Nội

<sup>3</sup> Viện Khoa học Vật liệu – Viện Hàn lâm Khoa học Việt Nam

**Tóm tắt:** Vật liệu điện cực  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  với ( $x = 0; 0.1; 0.2$ ) được tổng hợp ở  $900\text{ }^\circ\text{C}$  bằng phương pháp phản ứng pha rắn từ  $\text{Li}_2\text{CO}_3$ ,  $\text{MnO}_2$  và  $\text{NiO}$ . Phổ XRD đã xác nhận các mẫu thu được có cấu trúc spinel của  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  mà không có bất kỳ tạp chất nào. Khi hàm lượng Ni tăng lên, kích thước hạt của các mẫu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  giảm đi đồng thời biên hạt chuyển từ dạng tròn cạnh tại  $x = 0$  sang dạng các hình khối sắc cạnh ở  $x = 0.1$  và  $0.2$  cho thấy hiệu quả rõ rệt của việc pha tạp niken đến sự ổn định trật tự của tinh thể. Các đường cong C-V cho thấy mẫu pha tạp niken có sự tiêm/thoát ion  $\text{Li}^+$  và tính thuận nghịch tốt hơn hẳn mẫu không pha tạp. Phép đo phóng nạp với dòng  $0.5\text{ C}$  trong khoảng điện thế từ  $2.0\text{ V} \div 4.0\text{ V}$  với điện cực anot  $\text{SnO}_2$  cho thấy dung lượng của mẫu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  với  $x = 0.1$  cho giá trị cao nhất đạt  $50.8\text{ mAh/g}$  cải thiện đáng kể so với mẫu không pha tạp chỉ đạt  $44.9\text{ mAh/g}$ .

**Từ khóa:** Vật liệu catot,  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$ , pin liti-ion, LIBs.

Nhận bài ngày 10.8.2017; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 10.9.2017

Liên hệ tác giả: Đặng Trần Chiến; Email: dtchien@hunre.edu.vn

### 1. MỞ ĐẦU

Pin Lithium ion (LIBs) đã trở thành một trong những công nghệ lưu trữ năng lượng quan trọng nhất hiện nay. Chúng được phát minh ra vào đầu những năm 1990 và bây giờ được sử dụng rộng rãi như là nguồn năng lượng cho các thiết bị điện tử như máy tính xách tay, điện thoại di động, dụng cụ điện, vv. Spinel  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$  và các dẫn xuất của nó đã được sử dụng làm vật liệu catot cho pin lithium ion vì giá thành thấp, trữ lượng cao trong tự nhiên và dễ dàng trong các phương pháp tổng hợp. Tính chất điện hóa của  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$  trong các dung dịch điện ly hữu cơ đã được nghiên cứu rộng rãi hơn hai thập kỷ qua. Mặc dù pin lithium ion được coi là thiết bị điện hóa thành công nhất với mật độ năng lượng cao,

chúng vẫn có nguy cơ mất an toàn do tính dễ cháy của chất điện ly hữu cơ và việc sử dụng không đúng cách như sạc quá dòng hoặc ngắn mạch. Hơn nữa, spinel  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$  trong các dung dịch điện ly hữu cơ có chu kỳ hoạt động không tốt như  $\text{LiFePO}_4$  do sự không ổn định của cấu trúc mạng tinh thể. Vấn đề chủ yếu của  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$  là sự giảm dần dung lượng rất nhanh ở cả nhiệt độ phòng lẫn nhiệt độ cao. Sự giảm cấp dung lượng trong quá trình lưu trữ hay trong các chu kỳ phóng nạp vẫn chưa được xác định rõ và nhiều nguyên nhân có thể được đề nghị như tính không bền cấu trúc [1-3], hiệu ứng Jahn-Teller [4], Mn hòa tan vào dung dịch điện ly [5-7]...

Việc thay thế các ion kim loại vào vị trí Mn trong  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$ , như Li, Co, Ni, Al, Mg, Cr, Fe, có thể cải thiện độ bền phóng nạp của pin [8-10]. Hơn nữa, F [11] và S [12] pha tạp vào vị trí oxi cũng là một phương pháp hiệu quả để cải thiện thời gian lưu trữ và tính ổn định phóng nạp. Trong số những vật liệu này,  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  cho thấy sự ổn định trong quá trình nạp/xả là tốt nhất [13-17]. Sự cải thiện này có thể xuất phát từ mối liên kết hóa học mạnh mẽ của Mn-O-Ni để ổn định vị trí spinel bát diện, ngăn ngừa sự giải phóng ion  $\text{Mn}^{3+}$  vào trong chất điện ly và hạn chế sự méo mó của hiệu ứng Jahn-Teller. Vì một số lượng Ni lớn pha tạp có thể làm giảm đáng kể công suất ở 4 V cho nên hầu hết các nghiên cứu về  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  đã giới hạn trong khoảng  $x \leq 0.2$  cho cấu trúc tinh thể ổn định và hiệu suất điện hóa tốt.

Các spinel  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$  có rất nhiều phương pháp tổng hợp như: phương pháp phản ứng pha rắn [18, 19]; phương pháp sol-gel [20, 21]; polime spray [22]; thủy nhiệt [23-25]; vv. Tuy nhiên, hầu hết các phương pháp này đều có quá trình xử lý phức tạp, sử dụng vật liệu đắt tiền hoặc tốn nhiều thời gian và giá thành cao cho các ứng dụng thương mại. Trong nghiên cứu này, các spinel  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  với ( $x = 0, 0.1$  và  $0.2$ ) được tổng hợp ở  $900^\circ\text{C}$  từ  $\text{Li}_2\text{CO}_3$ ,  $\text{MnO}_2$  và  $\text{NiO}$  bằng phương pháp phản ứng pha rắn. Đây là phương pháp đơn giản về công nghệ, có hiệu quả kinh tế cao và có thể sản xuất với số lượng lớn. Chính vì thế chúng tôi lựa chọn phương pháp này để chế tạo vật liệu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$ . Phổ XRD đã xác nhận mẫu thu được có cấu trúc spinel của  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  mà không có bất kỳ tạp chất nào. Khi hàm lượng Ni tăng lên, kích thước hạt của các mẫu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  giảm đi đồng thời biên hạt chuyển từ dạng tròn cạnh tại  $x = 0$  sang dạng các hình khối sắc cạnh ở  $x = 0.1$  và  $0.2$ , điều này cho thấy hiệu quả rõ rệt của việc pha tạp niken đến sự ổn định trật tự của tinh thể. Các đường cong C-V cho thấy mẫu pha tạp niken có sự tiêm/thoát ion  $\text{Li}^+$  và tính thuận nghịch tốt hơn hẳn mẫu không pha tạp. Phép đo phóng nạp với dòng 0.5 C trong khoảng điện thế từ 2.0 V ÷ 4.0 V sử dụng anot  $\text{SnO}_2$  cho thấy dung lượng của mẫu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  với  $x = 0.1$  cho giá trị cao nhất đạt 59.8 mAh/g cải thiện đáng kể so với mẫu không pha tạp chỉ đạt 44.9 mAh/g.

## 2. THỰC NGHIỆM CHẾ TẠO VẬT LIỆU

Vật liệu tích/thoát ion  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  được chế tạo từ các chất ban đầu là dioxit mangan  $\text{MnO}_2$ , muối liti cacbonat  $\text{Li}_2\text{CO}_3$  và niken oxit  $\text{NiO}$  căn cứ vào tỷ lệ thành phần nguyên tử của pha vật liệu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  cần tổng hợp là  $\text{Li}:\text{Ni}:\text{Mn} = 1:x:2-x$  với ( $x = 0, 0.1$  và  $0.2$ ). Vật liệu được nghiền trộn sơ bộ bằng cối mã não trong thời gian 2 giờ, sau đó được ủ nhiệt ở  $600^\circ\text{C}$  với tốc độ gia nhiệt là  $10^\circ/\text{phút}$ . Khi đạt nhiệt độ  $600^\circ\text{C}$  mẫu được giữ 4 giờ sau đó để nguội tự do. Hỗn hợp bột thu được tiếp tục được nghiền trộn lần II bằng máy nghiền bi năng lượng cao với tốc độ 500 vòng/phút, hỗn hợp được nghiền trộn trong 5 giờ. Sau khi nghiền trộn, vật liệu được mang ép thành viên có đường kính 1cm bằng máy ép với lực ép  $\sim 450$  MPa. Các viên mẫu được thiêu kết ở nhiệt độ  $900^\circ\text{C}$  trong thời gian 6 giờ với tốc độ gia nhiệt  $10^\circ/\text{phút}$ , sau thời gian thiêu kết vật liệu được để nguội tự do.

Đặc điểm cấu trúc của vật liệu được khảo sát trên hệ nhiễu xạ X ray – D5005 SIEMEN với nguồn phát xạ  $\text{Cu K}\alpha$  ( $\lambda = 1.5406\text{\AA}$ ). Đặc điểm hình thái học được khảo sát trên kính hiển vi điện tử quét FE-SEM HITACHI 4800.

Điện cực màng mỏng được chế tạo từ vật liệu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  được trộn với carbon black (super P và KS4) và polyvinylidene fluoride (PVDF) trong dung môi N-methylpyrrolidon (NMP) theo tỷ lệ khối lượng 70:20:10, sau đó được nghiền bi hành tinh để tạo dung dịch bùn nhão. Dung dịch này được phủ trên một lá nhôm mỏng có chiều dày  $15\ \mu\text{m}$  sau đó sấy khô ở  $100^\circ\text{C}$  bằng lò chân không trong 12 giờ để thu được một lá catot. Lá catot sau đó được ép bằng máy ép con lăn và máy ép thủy lực để tăng mật độ và độ đồng nhất, tiếp theo được cắt thành các điện cực có dạng hình tròn sử dụng làm điện cực dương trong pin CR2032.

Tính chất tích/thoát ion liti tương ứng với quá trình phóng nạp xảy ra trong pin ở phía điện cực catot. Sử dụng phương pháp quét thế vòng tuần hoàn (C-V) trong dung dịch muối liti nitorat ( $\text{LiNO}_3$ ) 1M hòa tan trong nước sẽ giúp đánh giá được động học của quá trình tích/thoát. Hệ điện hóa dùng trong phép đo C-V là hệ ba điện cực, gồm điện cực làm việc (WE) là điện cực màng mỏng  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  đã chế tạo, điện cực đối (CE) sử dụng platin (Pt) và điện cực so sánh (RE) sử dụng clorua bạc  $\text{Ag}/\text{AgCl}/\text{KCl}$  3M.

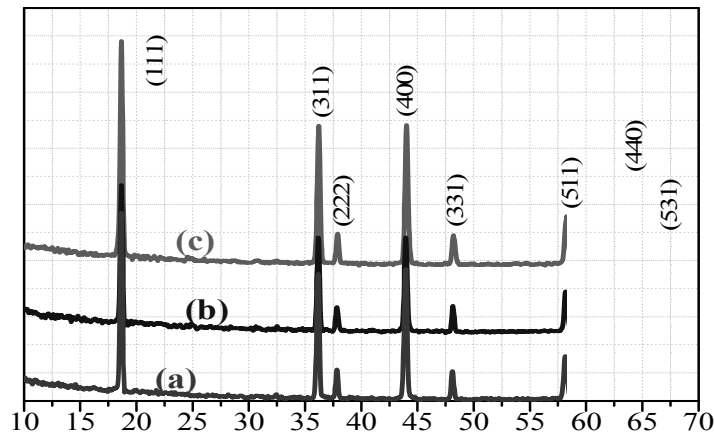
Phép đo phóng nạp được thực hiện với tế bào CR2032 điện cực anot sử dụng thiếc oxit  $\text{SnO}_2$ , màng ngăn cách sử dụng polyethylene-polypropylene-polyethylene (Celgard), dung dịch chất điện ly là  $\text{LiClO}_4$  1M trong dung môi ethylene carbonate/diethylene carbonate

## 3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

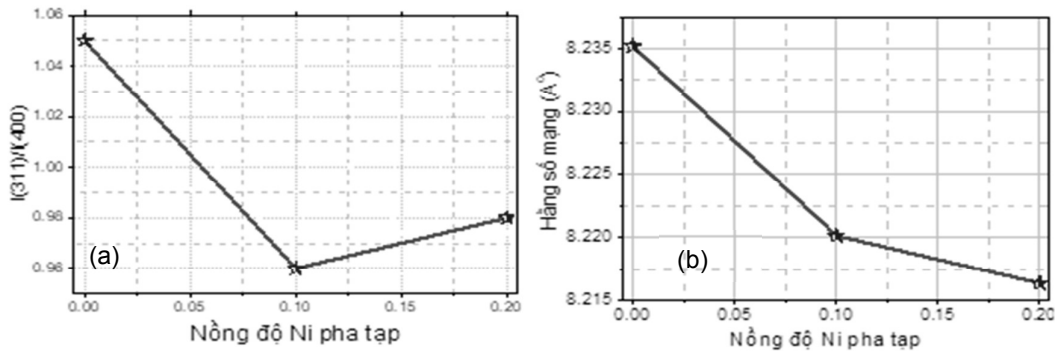
### 3.1. Cấu trúc và hình thái học của vật liệu $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$

Hình 1, phổ nhiễu xạ XRD của vật liệu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  pha tạp Ni với  $x = 0, 0.1$  và  $0.2$  tổng hợp cho thấy các mẫu đều có đỉnh nhiễu xạ phù hợp với thẻ chuẩn JPCDS số 35-0782,

đó là các đỉnh (111), (311), (222), (400), (331), (511), (440) và (531), điều này khẳng định rằng tất cả các mẫu được xác định là đơn pha với pha cubic-spinel của nhóm không gian  $Fd-3m$ , trong đó các ion Li chiếm các vị trí tứ diện (8a) trong khi các ion Mn nằm ở các vị trí bát diện (16d) [26]. Phổ XRD cho thấy không có đỉnh nào của các chất khác, điều này cho dự đoán rằng vật liệu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  được tổng hợp bằng cách pha tạp Ni với tỷ lệ  $x = 0.1$  và  $0.2$  bằng phương pháp pha rắn, ion Ni đã thay thế thành công vào các vị trí của ion Mn. Các đỉnh nhiễu xạ có cường độ mạnh và sắc nét cho thấy rằng vật liệu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  tổng hợp được có sự kết tinh tốt. Sự pha trộn cation của  $\text{Li}^+/\text{Mn}^{3+}$  thường được đặc trưng bởi cường độ đỉnh (220) [26], cường độ đỉnh (220) càng nhỏ có nghĩa là hỗn hợp cation càng nhỏ. Phổ nhiễu xạ XRD ở hình 1 cho thấy không hề có bất kỳ đỉnh (220) nào trong cả ba mẫu, nên ta khẳng định rằng không có sự pha trộn của cation của  $\text{Li}^+/\text{Mn}^{3+}$ . Do đó, có thể hy vọng rằng vật liệu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  tổng hợp được có tính năng điện hóa tốt.



**Hình 1.** Phổ XRD của vật liệu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  pha tạp Ni với  $x = 0$  (a);  $x = 0.1$  (b) và  $x = 0.2$  (c) tổng hợp bằng phản ứng pha rắn ở  $900^\circ\text{C}$ .

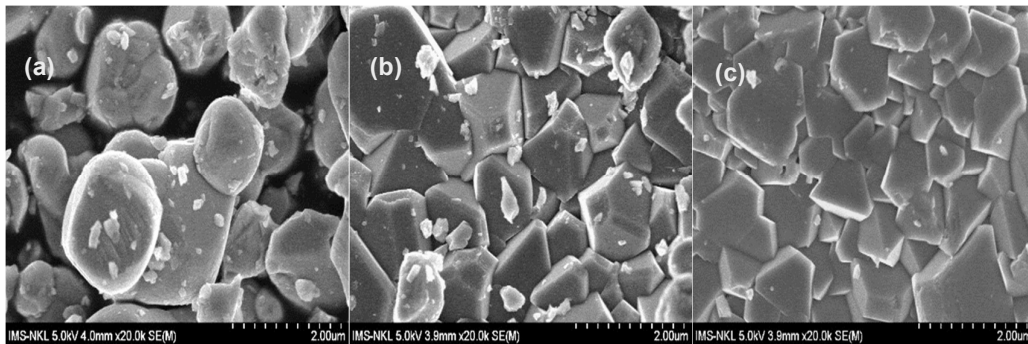


**Hình 2.** Đồ thị tỷ lệ cường độ đỉnh  $I(311)/I(400)$  (a) và hằng số mạng (b).



Thông số mạng của tinh thể được tính bằng phần mềm Unitcell, bằng cách sử dụng tám đỉnh của nhiễu xạ XRD và được biểu diễn bằng đồ thị ở hình 2. Tỷ số cường độ đỉnh I(311)/I(400) hình 2a phản ánh mức độ méo của cấu trúc cubic-spinel [26]. Tỷ số cường độ đỉnh I(311)/I(400) của  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  với  $x = 0.1$  là 0.96, tỷ số này là thấp hơn so với các mẫu còn lại cho thấy mẫu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  với  $x = 0.1$  có mức độ biến dạng nhỏ nhất [27].

Hình 2b cho thấy hằng số mạng giảm đi từ 8.23516 Å của  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  với  $x = 0$  đến 8.21636 Å của  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  với  $x = 0.2$  khi nồng độ pha tạp Ni tăng lên. Điều này được giải thích rằng khi pha tạp niken trong vật liệu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  sẽ làm tăng nồng độ  $\text{Mn}^{4+}$ . Bán kính ion của  $\text{Mn}^{4+}$  ( $r = 0.53$  Å) nhỏ hơn nhiều so với  $\text{Mn}^{3+}$  ( $r = 0.645$  Å). Bán kính ion của  $\text{Ni}^{3+}$  (0.56 Å) nhỏ hơn bán kính của ion  $\text{Mn}^{3+}$  ( $r = 0.645$  Å) nên khi thay thế ion  $\text{Mn}^{3+}$  bằng ion  $\text{Ni}^{3+}$  làm giảm khoảng cách Mn-O, đồng thời làm giảm mức độ khoảng trống khuyết tật oxi ở điều kiện nhiệt độ thiêu kết cao. Kết hợp với ảnh SEM hình 3 cho thấy khi hàm lượng pha tạp Ni tăng lên, kích thước hạt của các mẫu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  giảm đi đồng thời biên hạt chuyển từ dạng tròn cạnh tại  $x = 0$  sang dạng các hình khối sắc cạnh ở  $x = 0.1$  và 0.2. Những kết quả này cho thấy việc pha tạp niken tác động đến sự ổn định trật tự của tinh thể. Trong vật liệu spinel  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$  không pha tạp, chỉ có  $\text{Mn}^{3+}$  và  $\text{Mn}^{4+}$  chiếm các vị trí bát diện (16d) với tỷ lệ chiếm chỗ 1: 1. Khi Ni được thay thế Mn trong  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$ , bốn cation  $\text{Mn}^{3+}$ ,  $\text{Mn}^{4+}$ ,  $\text{Ni}^{2+}$  hoặc  $\text{Ni}^{3+}$  có thể sẽ chiếm các vị trí bát diện. Các cation này có bán kính ion và năng lượng liên kết với oxygen khác nhau. Khi một lượng Ni ngày càng tăng trong  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  sẽ gây ra sự khác biệt đáng kể trên các vị trí bát diện (16d) và nó làm thay đổi đáng kể thông số mạng tinh thể của vật liệu [28, 29].

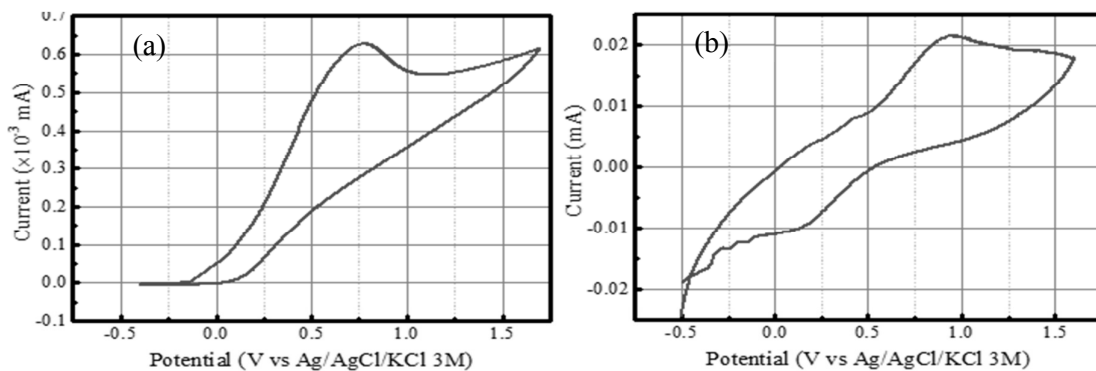


Hình 3. Ảnh FE-SEM của vật liệu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  pha tạp Ni với  $x = 0$  (a),  $x = 0.1$  (b) và  $x = 0.2$  (c) tổng hợp bằng phản ứng pha rắn ở 900 °C.

### 3.2. Các tính chất điện hóa của vật liệu $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$

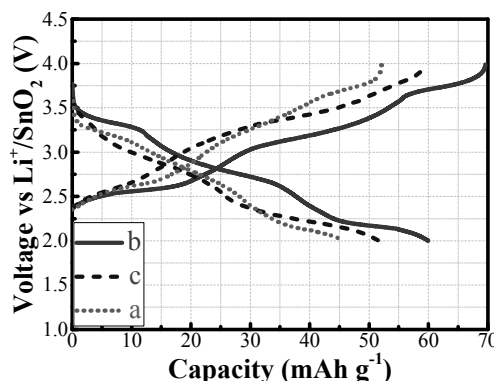
Hình 4 là đường đặc trưng cho phổ C-V của vật liệu màng mỏng điện cực catot bằng vật liệu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  đã chế tạo ở trên, điện cực anot sử dụng dioxit thiếc  $\text{SnO}_2$  và điện

cực so sánh sử dụng Ag/AgCl/KCl 3M. Dung dịch điện li sử dụng 1M LiNO<sub>3</sub> hòa tan trong nước. Hình 4a, là phổ C-V của các điện cực từ mẫu LiNi<sub>x</sub>Mn<sub>2-x</sub>O<sub>4</sub> với x = 0 và của vật liệu LiNi<sub>x</sub>Mn<sub>2-x</sub>O<sub>4</sub> pha tạp Ni với nồng độ x=0.1 ở hình 4(b) cho thấy đối với mẫu không pha tạp Ni theo đường nạp, xuất hiện một đỉnh oxy hóa tại điện thế 0.75 V, điều này chứng tỏ đã có sự oxy hóa và tách ion Li<sup>+</sup> ra khỏi điện cực. Theo chiều xả, cũng xuất hiện đỉnh khử tại điện áp 0.1 V, tuy nhiên đỉnh này mờ nhạt, đồng thời phổ C-V cho thấy hoạt động tiêm/thoát của vật liệu không pha tạp thể hiện quá trình thuận nghịch chưa thực sự tốt. Phổ C-V của vật liệu pha tạp cho thấy xuất hiện một cặp đỉnh oxy hóa/khử tại 0.94 V/-0.25 V. Phổ C-V cho thấy vật liệu pha tạp Ni thể hiện quá trình tiêm thoát thuận nghịch tương đối tốt. Một điểm nữa từ phổ C-V cho thấy đáp ứng dòng của mẫu pha tạp Ni lớn hơn của mẫu không pha tạp rất nhiều. Như vậy chúng ta có thể kết luận rằng khi pha tạp Ni vật liệu thu được có hoạt động điện hóa tốt hơn, như đã hy vọng rằng vật liệu LiNi<sub>x</sub>Mn<sub>2-x</sub>O<sub>4</sub>, pha tạp Ni với nồng độ x=0.1 có tỷ số cường độ đỉnh I(311)/I(400) nhỏ nhất sẽ cho ta cấu trúc trật tự tốt và hoạt động điện hóa tốt.



**Hình 4.** Phổ C-V của điện cực từ vật liệu LiMn<sub>2</sub>O<sub>4</sub> (a) của vật liệu LiNi<sub>x</sub>Mn<sub>2-x</sub>O<sub>4</sub> (b).

Hình 5 biểu diễn chu kỳ nạp/xả của tất cả các mẫu giá trị dung lượng đạt lớn nhất là 59.8 mAh/g đối với mẫu pha tạp x = 0.1 và mẫu đạt dung lượng nhỏ nhất là 44.9 mAh/g đối với mẫu không pha tạp. Dung lượng của các mẫu đạt được tương tự với một số kết quả nghiên cứu [30]. Mặc dù so với một số công bố gần đây thì kết quả này còn rất khiêm tốn. Tuy nhiên ở đây chúng ta sử dụng dòng nạp/xả 0.5 C là tương đối lớn, chứng tỏ vật liệu tổng hợp được có khả năng tiêm thoát tốt ion liti. Một điều nữa giải thích cho dung lượng nạp xả trong nghiên cứu này có giá trị chưa cao là do điện cực anot được dùng là dioxit thiếc SnO<sub>2</sub>. Các đường nạp xả của tất cả các mẫu cho chúng ta thấy đường cong nạp và đường cong xả có dáng điệu tương tự nhau, điều này cho ta thấy vật liệu đã tổng hợp có tính thuận nghịch tốt.



**Hình 5.** Đường phóng nạp của vật liệu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  tổng hợp bằng phương pháp pha rắn ở  $900^\circ\text{C}$  pha tạp Ni với  $x = 0$  (a),  $x = 0.1$  (b) và  $x = 0.2$  (c).

Theo các báo về vật liệu  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  pha tạp Ni, đường cong phóng nạp của chúng thường gồm hai đoạn bằng thể hiện hoạt động điện hóa của các ion Mn và Ni một đoạn trên 4 V và một đoạn bằng dưới 4 V [13] là do hoạt động điện hóa của ion Ni lên tới 4.8 V [31-37]. Trong nghiên cứu này thì các đoạn bằng đều nằm dưới 4 V và có những đoạn bằng của hoạt động phóng nạp ở dưới 3 V. Điều này là hoàn toàn hợp lý vì trong nghiên cứu này điện cực anot là thối oxit  $\text{SnO}_2$  [38].

#### 4. KẾT LUẬN

Tóm lại, các vật liệu catot spinel  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  pha tạp Ni với ( $x = 0$ ; 0.1 và 0.2) chế tạo được tạo được bằng phương pháp phản ứng pha rắn ở nhiệt độ thiêu kết  $900^\circ\text{C}$  là hoàn toàn đơn pha. Spinel  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  với nồng độ pha tạp Ni ( $x = 0.1$ ) cho thấy là vật liệu có cấu trúc tinh thể hoàn thiện nhất. Điện cực  $\text{LiNi}_{0.1}\text{Mn}_{1.9}\text{O}_4$  cho hoạt động điện hóa là tốt nhất, khả năng thuận nghịch cao. Hoạt động phóng nạp tương đối tốt ở dòng 0.5 C với điện cực anot  $\text{SnO}_2$  với dung lượng đạt 59.8 mA/g.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Rossouw, M.H., et al. (1990), "Structural aspects of lithium-manganese-oxide electrodes for rechargeable lithium batteries", *Materials Research Bulletin*, 25(2): pp.173-182.
2. Xia, Y. and M. Yoshio (1996), "An Investigation of Lithium Ion Insertion into Spinel Structure Li-Mn-O Compounds", *Journal of The Electrochemical Society*, 143(3): pp.825-833.
3. Wen, S.-J., et al. (1996), "FTIR Spectroscopy of Metal Oxide Insertion Electrodes: A New Diagnostic Tool for Analysis of Capacity Fading in Secondary  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$  Cells", *Journal of The Electrochemical Society*, 143(6): pp.L136-L138.
4. Gummow, R.J., A. de Kock, and M.M. (1994), "Thackeray, Improved capacity retention in rechargeable 4 V lithium/lithium-manganese oxide (spinel) cells", *Solid State Ionics*, 69(1): pp.59-67.

5. Jang, D.H., Y.J. Shin, and S.M. Oh (1996), "Dissolution of Spinel Oxides and Capacity Losses in 4VLi/Li<sub>x</sub>Mn<sub>2</sub>O<sub>4</sub> Cells", *Journal of The Electrochemical Society*, 143(7): pp.2204-2211.
6. Xia, Y. and M. Yoshio (1997), "Optimization of Spinel Li<sub>1+x</sub>Mn<sub>2-y</sub>O<sub>4</sub> as a 4 V Li-Cell Cathode in Terms of a Li-Mn-O Phase Diagram", *Journal of The Electrochemical Society*, 144(12): pp.4186-4194.
7. Blyr, A., et al. (1998), "Self-Discharge of LiMn<sub>2</sub>O<sub>4</sub>/C Li-Ion Cells in Their Discharged State: Understanding by Means of Three-Electrode Measurements", *Journal of The Electrochemical Society*, 145(1): pp.194-209.
8. Nouri, J., et al. (2016), "Synthesis, characterization and optical band gap of Lithium cathode materials: Li<sub>2</sub>Ni<sub>8</sub>O<sub>10</sub> and LiMn<sub>2</sub>O<sub>4</sub> nanoparticles", *International Journal of Nano Dimension*, 7(1): pp.15-24.
9. Song, D., et al. (1999), "The spinel phases LiAl<sub>y</sub>Mn<sub>2-y</sub>O<sub>4</sub> (y=0, 1/12, 1/9, 1/6, 1/3) and Li(Al,M)<sub>1/6</sub>Mn<sub>11/6</sub>O<sub>4</sub> (M=Cr, Co) as the cathode for rechargeable lithium batteries", *Solid State Ionics*, 117(1-2): pp.151-156.
10. Sigala, C., et al. (2001), "Influence of the Cr Content on the Electrochemical Behavior of the LiCr<sub>y</sub>Mn<sub>2-y</sub>O<sub>4</sub> (0 ≤ y ≤ 1) Compounds: II. Cyclovoltammetric Study of Bulk and Superficial Processes", *Journal of The Electrochemical Society*, 148(8): pp.A819-A825.
11. Amatucci, G., et al. (1999), "The elevated temperature performance of the LiMn<sub>2</sub>O<sub>4</sub>/C system: failure and solutions", *Electrochimica Acta*, 45(1-2): pp.255-271.
12. Jiang, Q., et al. (2015), "Plasma-Assisted Sulfur Doping of LiMn<sub>2</sub>O<sub>4</sub> for High-Performance Lithium-Ion Batteries", *The Journal of Physical Chemistry C*, 119(52): pp.28776-28782.
13. Xin Gu, X.L., Liqiang Xu, Huayun Xu, Jian Yang, Yitai Qian (2012), "Synthesis of Spinel LiNi<sub>x</sub>Mn<sub>2-x</sub>O<sub>4</sub> (x=0, 0.1, 0.16) and Their High Rate Charge-Discharge Performances", *Int. J. Electrochem. Sci*(3): pp.2504 - 2512
14. Kebede, M.A., et al.(2013), "Synthesis and Electrochemical Properties of Ni Doped Spinel LiNi<sub>x</sub>Mn<sub>2-x</sub>O<sub>4</sub> (0 ≤ x ≤ 0.5) Cathode Materials for Li-Ion Battery", *ECS Transactions*, 50(40): pp.1-14.
15. Wang, F.X., et al.(2013), "Spinel LiNi<sub>x</sub>Mn<sub>2-x</sub>O<sub>4</sub> as cathode material for aqueous rechargeable lithium batteries", *Electrochimica Acta*, 93: pp.301-306.
16. Adnan Hafez Mini1, M.B.K., Ahmed Khaled Kbetri (2016), "Studying Structural and Optical Properties of Thin Films LiNi<sub>x</sub>Mn<sub>2-x</sub>O<sub>4</sub> (x = 0, 0.4, 0.5, 0.6) Prepared by Sol-Gel Method", *American Journal of Nanosciences* 2(4): pp.46-50.
17. Purwaningsih, D., R. Roto, and H. Sutrisno (2016), "Synthesis of LiNi<sub>x</sub>Mn<sub>2-x</sub>O<sub>4</sub> by low-temperature solid-state reaction and its microstructure", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 107(1): p.012033.
18. Jiao, C., et al. (2015), "Solid-state synthesis of spherical hierarchical LiNi<sub>0.5</sub>Mn<sub>1.5</sub>O<sub>4</sub> through an improved calcination method and its cyclic performance for 5 V lithium ion batteries", *Solid State Ionics* 277: pp.50-56.
19. Cai, Y., et al. (2014), "Long cycle life, high rate capability of truncated octahedral LiMn<sub>2</sub>O<sub>4</sub> cathode materials synthesized by a solid-state combustion reaction for lithium ion batteries", *Ceramics International*, 40(9, Part A): pp.14039-14043.
20. Sivakumar, P., et al. (2015), "Sonochemical synthesis of LiNi<sub>0.5</sub>Mn<sub>1.5</sub>O<sub>4</sub> and its electrochemical performance as a cathode material for 5 V Li-ion batteries", *Ultrasonics Sonochemistry*, 26: pp.332-339.

21. Hamankiewicz, B., et al. (2014), "The effect of electrode thickness on electrochemical performance of  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$  cathode synthesized by modified sol-gel method", *Solid State Ionics*, 262: pp.9-13.
22. Karthick, S.N., et al. (2010), "Nanocrystalline  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$  thin film cathode material prepared by polymer spray pyrolysis method for Li-ion battery", *Journal of Alloys and Compounds*, 489(2): pp.674-677.
23. Hosono, E., et al. (2010), "Synthesis of single crystalline  $\text{Li}_{1.44}\text{MnO}_2$  nanowires with large specific capacity and good high current density property for a positive electrode of Li ion battery", *Journal of Power Sources*, 195(20): pp.7098-7101.
24. Kim, D.K., et al. (2008), "Spinel  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$  Nanorods as Lithium Ion Battery Cathodes", *Nano Letters*, 8(11): pp.3948-3952.
25. Zhao, M., et al. (2011), "Electrochemical performance of single crystalline spinel  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$  nanowires in an aqueous  $\text{LiNO}_3$  solution", *Electrochimica Acta*, 56(16): pp.5673-5678.
26. Liu, B.-S., et al. (2015), "Preparation of submicrocrystal  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$  used  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  as precursor and its electrochemical performance for lithium ion battery", *Journal of Alloys and Compounds*, 622: pp.902-907.
27. Thackeray, M.M. (1997), "Manganese oxides for lithium batteries", *Progress in Solid State Chemistry*, 25(1): pp.1-71.
28. Guo, D., et al. (2014), "Facile synthesis of  $\text{LiAl}_{0.1}\text{Mn}_{1.9}\text{O}_4$  as cathode material for lithium ion batteries: towards rate and cycling capabilities at an elevated temperature", *Electrochimica Acta*, 134: pp.338-346.
29. Lee, Y.-S., N. Kumada, and M. Yoshio (2001), "Synthesis and characterization of lithium aluminum-doped spinel ( $\text{LiAl}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$ ) for lithium secondary battery", *Journal of Power Sources*, 96(2): pp.376-384.
30. Park, Y.J., et al. (1998), "Fabrication of  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$  thin films by sol-gel method for cathode materials of microbattery", *Journal of Power Sources*, 76(1): pp.41-47.
31. Arrebola, J.C., et al. (2006), "Electrochemical properties of  $\text{LiNi}_{0.5}\text{Mn}_{1.5}\text{O}_4$  films prepared by spin-coating deposition", *Journal of Power Sources*, 162(1): pp.606-613.
32. Caballero, A., et al. (2006), " $\text{LiNi}_{0.5}\text{Mn}_{1.5}\text{O}_4$  thick-film electrodes prepared by electrophoretic deposition for use in high voltage lithium-ion batteries", *Journal of Power Sources*, 158(1): pp.583-590.
33. Park, S.B., et al. (2006), "Electrochemical properties of  $\text{LiNi}_{0.5}\text{Mn}_{1.5}\text{O}_4$  cathode after Cr doping", *Journal of Power Sources*, 159(1): pp.679-684.
34. Fan, Y., et al. (2007), "Effects of the nanostructured  $\text{SiO}_2$  coating on the performance of  $\text{LiNi}_{0.5}\text{Mn}_{1.5}\text{O}_4$  cathode materials for high-voltage Li-ion batteries", *Electrochimica Acta*, 52(11): pp.3870-3875.
35. Arrebola, J.C., et al. (2008), "A high energy Li-ion battery based on nanosized  $\text{LiNi}_{0.5}\text{Mn}_{1.5}\text{O}_4$  cathode material", *Journal of Power Sources*, 183(1): pp.310-315.
36. Du, G., et al. (2008), "Fluorine-doped  $\text{LiNi}_{0.5}\text{Mn}_{1.5}\text{O}_4$  for 5 V cathode materials of lithium-ion battery", *Materials Research Bulletin*, 43(12): pp.3607-3613.
37. Kunduraci, M. and G.G. Amatucci (2008), "The effect of particle size and morphology on the rate capability of 4.7 V  $\text{LiMn}_{1.5+\delta}\text{Ni}_{0.5-\delta}\text{O}_4$  spinel lithium-ion battery cathodes", *Electrochimica Acta*, 53(12): pp.4193-4199.
38. Kurzweil, P. and K. Brandt (2009), "Secondary batteries - lithium rechargeable systems: Overview, in Encyclopedia of Electrochemical Power Sources, J. Garche, Editor", *Elsevier: Amsterdam*. pp.1-26.

**SPINEL OF MATERIAL  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  ( $x = 0; 0.1; 0.2$ ) SYNTHESIZED BY SOLID – STATED METHOD USED AS CATHODES FOR LITHIUM - ION BATTERIES WITH  $\text{SnO}_2$  ANODE**

**Abstract:** Electrode material  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  with ( $x = 0; 0.05; 0.1; 0.2$ ) was synthesized at  $900\text{ }^\circ\text{C}$  by solid-state method from  $\text{Li}_2\text{CO}_3$ ,  $\text{MnO}_2$  and  $\text{NiO}$ . XRD spectrum indicated that the sample obtained had the spinel structure of  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  without any impurities. As the Ni content increased, the particle size of the  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  samples decreased while the particle boundary changed from the circular form at  $x = 0$  into the octahedron at  $x = 0.1$  and  $0.2$ , showing significant effect of nickel doping to crystal order stability. The C-V curves shows that nickel doped samples have better  $\text{Li}^+$  ion injections and reversibility than non-doped samples. Measurement of  $0.5\text{ C}$  at  $0.5\text{ V}$  to  $0.5\text{ V}$  showed that the capacity of the  $\text{LiNi}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$  sample with  $x = 0.1$  achieved the highest value of  $59.8\text{ mAh/g}$ , much higher compared to the non-doped sample at only  $44.9\text{ mAh/g}$ .

**Keywords:** Cathode material,  $\text{Li}_x\text{Mn}_{2-x}\text{O}_4$ , Lithium – ion Battery, LiBs.

# ỨNG DỤNG GIẢI THUẬT TỐI ƯU BẦY ĐÀN VÀO BÀI TOÁN CỰC TIỂU HÓA ĐỘ TRỄ

Lê Chí Chung

Trường Đại học Thủ đô Hà Nội

**Tóm tắt:** Bài toán cực tiểu hóa độ trễ (Minimum Latency Problem – MLP) là một trong những bài toán tối ưu tổ hợp có nhiều ứng dụng trong thực tế. Trong trường hợp tổng quát, MLP đã được chứng minh là NP-khó. Hiện nay có nhiều công trình giải bài toán theo hướng tiếp cận gần đúng nhất là theo hướng phỏng sinh học. Lời giải thu được từ những công trình này là rất có triển vọng. Với mục đích kiểm chứng hiệu quả của thuật toán theo hướng tiếp cận này, bài báo trình bày thuật toán giải bài toán MLP bằng giải thuật tối ưu bầy đàn (Particle Swarm Optimize - PSO) với mong muốn thu được lời giải tốt hơn những công trình trước.

**Từ khóa:** Cực tiểu hóa độ trễ, Minimum Latency Problem, MLP, Giải thuật di truyền, Tối ưu bầy đàn, PSO.

Nhận bài ngày 18.8.2017; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 10.9.2017

Liên hệ tác giả: Lê Chí Chung; Email: lcchung@daihocthudo.edu.vn

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Bài toán cực tiểu hóa độ trễ (MLP – Minimum Latency Problem) được phát biểu dưới dạng đồ thị như sau:

Cho trước đồ thị đầy đủ  $G = (V, E)$  với trọng số không âm trên mỗi cạnh  $e \in E$ . Giả sử  $P$  là đường đi qua tất cả các đỉnh thuộc  $V$ , mỗi đỉnh đi qua đúng một lần. Độ trễ của đường đi được định nghĩa như sau:

Cho trước đỉnh xuất phát  $s$ , độ trễ của đỉnh  $v$  bất kì trên đường đi  $P$  là tổng độ dài các cạnh từ  $s$  tới  $v$  trên  $P$ . Độ trễ của đường đi  $T$  chính là tổng các độ trễ của các đỉnh nằm trên đường đi  $P$ .

Bài toán cực tiểu hóa độ trễ đặt ra: Cho trước đỉnh xuất phát  $s$ , hãy tìm đường đi đơn đi qua tất cả các đỉnh sao cho độ trễ của đường đi là nhỏ nhất.

Bài toán cực tiểu hóa độ trễ là bài toán có nhiều ứng dụng trong thực tiễn và đã được chứng minh trong trường hợp tổng quát là bài toán NP- khó nghĩa là ngoại trừ  $P = NP$  thì

không có thuật toán nào giải được nó với thời gian đa thức. Có nhiều cách tiếp cận để giải bài toán này. Hiện nay có 3 hướng tiếp cận để giải quyết bài toán:

- Phát triển thuật toán đúng tìm lời giải tối ưu như quy hoạch động [8], Branchcut, Branchprice và Branchcutprice [9, 10].

- Thuật toán đúng cận tỉ lệ  $\alpha$  ( $\alpha$  – approximation algoirthm) [11].

- Phát triển thuật toán meta heuristic với độ phức tạp không quá lớn và thực nghiệm trên các bộ dữ liệu chuẩn như thuật toán di truyền [1], phỏng luyện kim [13], tìm kiếm TABU [14].

Bài báo này đề cập tới việc sử dụng thuật toán tối ưu bầy đàn để giải quyết bài toán cực tiểu hóa độ trễ với mục đích tăng chất lượng lời giải.

## 2. GIẢI THUẬT TỐI ƯU HÓA BẦY ĐÀN

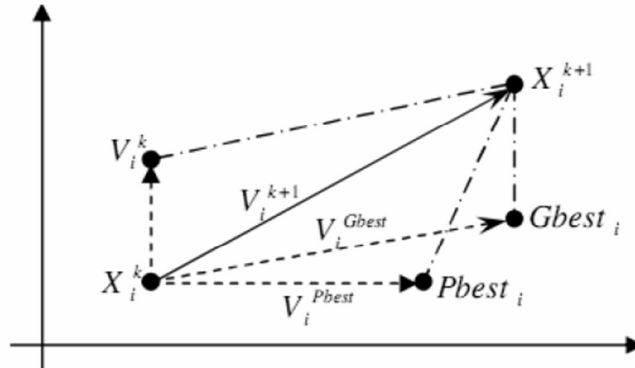
Particle Swarm Optimization (PSO) là một kĩ thuật tối ưu hóa dựa trên việc chọn ra ngẫu nhiên một quần thể và sau đó tiến hóa các cá thể qua nhiều thế hệ để đạt được nghiệm tối ưu. PSO được đề xuất bởi James Kennedy và Russell Eberhart [5] vào năm 1995. Từ đó, PSO ngày càng phổ biến đối với các nhà nghiên cứu và học viên, nó trở thành một kĩ thuật mạnh mẽ và hiệu quả để giải quyết các vấn đề tối ưu khó khăn

Ý tưởng chính của PSO xuất phát từ tình huống trong tự nhiên. Giả sử có một đàn chim đang tìm kiếm thức ăn trong một vùng nào đó. Ban đầu tất cả các con chim không biết thức ăn ở đâu. Tuy nhiên chúng sẽ dần biết thức ăn cách chúng bao xa sau bao nhiêu lần bay đi bay lại. Bởi lẽ, muốn tìm thấy thức ăn nhanh nhất tốt hơn cả là theo sau những con chim gần thức ăn nhất. Nghĩa là sau khi biết được thức ăn gần con chim nào thì cả bầy sẽ xích lại gần con chim ấy. PSO phỏng theo kịch bản này và sử dụng để giải các bài toán tối ưu.

Trong PSO thì mỗi giải pháp của bài toán chính là một con chim trong ý tưởng trên, được gọi là particle. Mỗi particle có một giá trị thích nghi (fitness value), được đánh giá bằng hàm đo độ thích nghi (fitness function), và một vận tốc để định hướng việc di chuyển (bay-flying) để tìm kiếm. Các particle sẽ duyệt không gian tìm kiếm (không gian nghiệm của bài toán) bằng cách xích lại gần các particle có điều kiện tốt nhất hiện thời (current optimum particles).

Trong một tập các cá thể chọn ra ngẫu nhiên (còn gọi là bầy đàn), mỗi cá thể sẽ bằng cách di chuyển tới vị trí khác trong không gian tìm kiếm cho đến khi tìm được vị trí tốt nhất. Khái niệm về sự thay đổi vị trí ấy được khái quát trong hình sau:





- Trong đó:
- $X_i^K$  : Vị trí cá thể thứ  $i$  tại thế hệ thứ  $K$
  - $X_i^{K+1}$  : Vị trí cá thể thứ  $i$  tại thế hệ thứ  $K+1$
  - $V_i^K$  : Vận tốc cá thể thứ  $i$  tại thế hệ thứ  $K$
  - $V_i^{K+1}$  : Vận tốc cá thể thứ  $i$  tại thế hệ thứ  $K+1$
  - $V_i^{P_{best}}$  : Vận tốc theo  $P_{best}$
  - $V_i^{G_{best}}$  : Vận tốc theo  $G_{best}$
  - $P_{best_i}$  : Vị trí tốt nhất của cá thể thứ  $i$  trong thế hệ
  - $G_{best_i}$  : Vị trí tốt nhất của cá thể trong cả quần thể

Như thế PSO được khởi tạo bởi một nhóm ngẫu nhiên các cá thể và tìm kiếm giải pháp tối ưu bằng việc thay đổi vị trí các cá thể để chúng có thể tiến lại gần những cá thể tối ưu hơn. Quá trình cứ lặp đi lặp lại cho đến khi sự thay đổi của các cá thể là không đáng kể. Trong mỗi vòng lặp (một thế hệ), một cá thể particle được cập nhật bởi hai giá trị:

– *Giá trị thứ nhất:*  $P_{best}$  là cá thể tốt nhất đạt được tới thời điểm hiện tại hay là cá thể có fitness value tốt nhất trong thế hệ hiện tại

– *Giá trị thứ hai:*  $G_{best}$  là cá thể tốt nhất đạt được trong các cá thể tối ưu của mỗi lần lặp. Đây có thể coi là cá thể có độ thích nghi cao nhất trong toàn không gian tìm kiếm.

– Khi một cá thể có độ thích nghi tốt nhất so với những cá thể lân cận thì có thể coi đây là tối ưu cục bộ gọi là  $L_{best}$

Trong nguyên bản do Eberhart và Kennedy đưa ra, các phần tử trong PSO sẽ duyệt không gian bài toán bằng cách theo sau các phần tử có điều kiện tốt nhất hiện thời (độ thích nghi lớn nhất). Cụ thể là sau mỗi khoảng thời gian rời rạc, vận tốc và vị trí của mỗi phần tử được cập nhật theo các công thức:

$$V[] = v[] + c_1 * \text{rand}() * (p_{best}[] - \text{present}[]) + C_2 * \text{ran}() * (g_{best}[] - \text{present}[]) \quad (1)$$

$$\text{Present}[] = \text{present}[] + v[] \quad (2)$$

Trong đó:

- $V[]$  : vecto mô tả vận tốc dịch chuyển của cá thể
- $Present[]$ : là vecto mô tả cá thể hiện tại
- $Rand()$  trả về kết quả là 0 hoặc 1. Nghĩa là cá thể chọn ngẫu nhiên dịch chuyển theo  $P_{best}$  hay  $G_{best}$ .

–  $C_1$  và  $C_2$  là tham số gia tốc hay là tham số học. Nó có ý nghĩa để tăng nhanh quá trình dịch chuyển. Việc lựa chọn giá trị cho 2 tham số này cũng cần cân trọng để tránh gia tốc nhanh quá sẽ làm quá trình lựa chọn cá thể tốt bị rơi vào best cục bộ.

Giả mã của thuật toán PSO được mô tả như dưới đây:

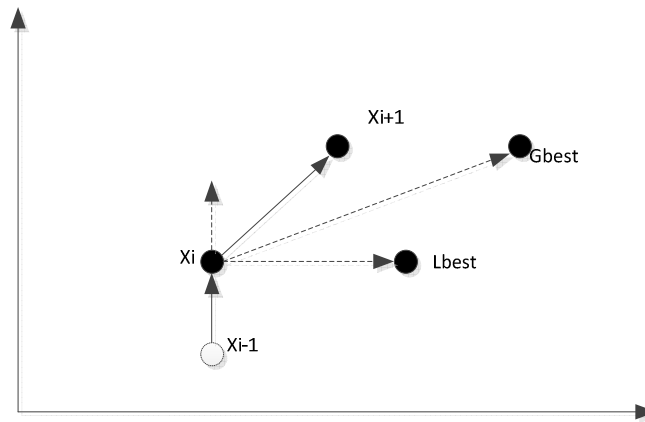
```

1  Khởi tạo particle; //Khởi tạo quần thể
2  Do
3      ForEach particle
4          Tính FitnessValue()
5          If Particle.FitnessValue < Pbest.FitnessValue then
6              Pbest = Particle;
7          EndIf
8          If Pbest < Gbest then Gbest = Pbest;
9          Endif
10     EndFor
11     ForEach particle
12         Tính vận tốc dịch chuyển theo công thức (1)
13         Dịch chuyển Particle theo công thức (2)
14     EndFor
15 While Điều kiện dừng chưa thỏa mãn;
```

Trên đây là thuật toán PSO nguyên bản [4] còn có tên là tối ưu toàn cục trong đó vận tốc dịch chuyển mỗi phần tử sẽ phụ thuộc trên hai yếu tố: vị trí phần tử tốt nhất trong thế hệ hiện tại  $P_{best}$  và vị trí phần tử tốt nhất từng đạt được trong các thế hệ từ trước tới giờ  $G_{best}$ . Sau này có thêm một số cải tiến với đề xuất đưa thêm yếu tố cục bộ là ngoài hai yếu tố  $P_{best}$  và  $G_{best}$  thì sự dịch chuyển của cá thể sẽ phụ thuộc thêm bởi một yếu tố là vị trí tốt nhất lân cận nó gọi là  $L_{best}$ . Khi đó vecto vận tốc sẽ được tính theo công thức sau:

$$v[] = v[] + c1.rand(). (pbest[] - present[]) + c2.rand() * (gbest[] - present[]) + c3.rand() * (lbest[] - present[]) \quad (1')$$

Một đề xuất cải tiến khác cũng rất triển vọng đó là sự dịch chuyển của phần tử ngoài hai yếu tố  $P_{best}$  và  $G_{best}$  thì còn thêm một yếu tố thứ ba đó là vecto dịch chuyển của cá thể đó ở thế hệ trước. Quá trình được khái quát qua hình sau:



Khi đó công thức tính vận tốc sẽ được viết lại là:

$$v[] = v[] + c1.rand().(pbest[] - present[]) + c2.rand() * (gbest[] - present[]) + c3.rand() * (forward[] - present[]) \quad (1'')$$

Giải thuật PSO có thể được xem như là một tập hợp các vector có quỹ đạo dao động xung quanh một khu vực được xác định bởi từng vị trí của cá thể tốt nhất trước đó và vị trí tốt nhất của một số cá thể khác. Gbest giúp bầy hội tụ nhanh, tất cả các cá thể được thu hút đồng thời. Tuy nhiên, nếu Gbest không phải là cá thể tốt nhất, thì đàn không thể khám phá khu vực khác, do đó, bầy đàn có thể bị mắc kẹt và thuật toán hội tụ sớm.

### 3. THUẬT TOÁN PSO ĐỀ XUẤT

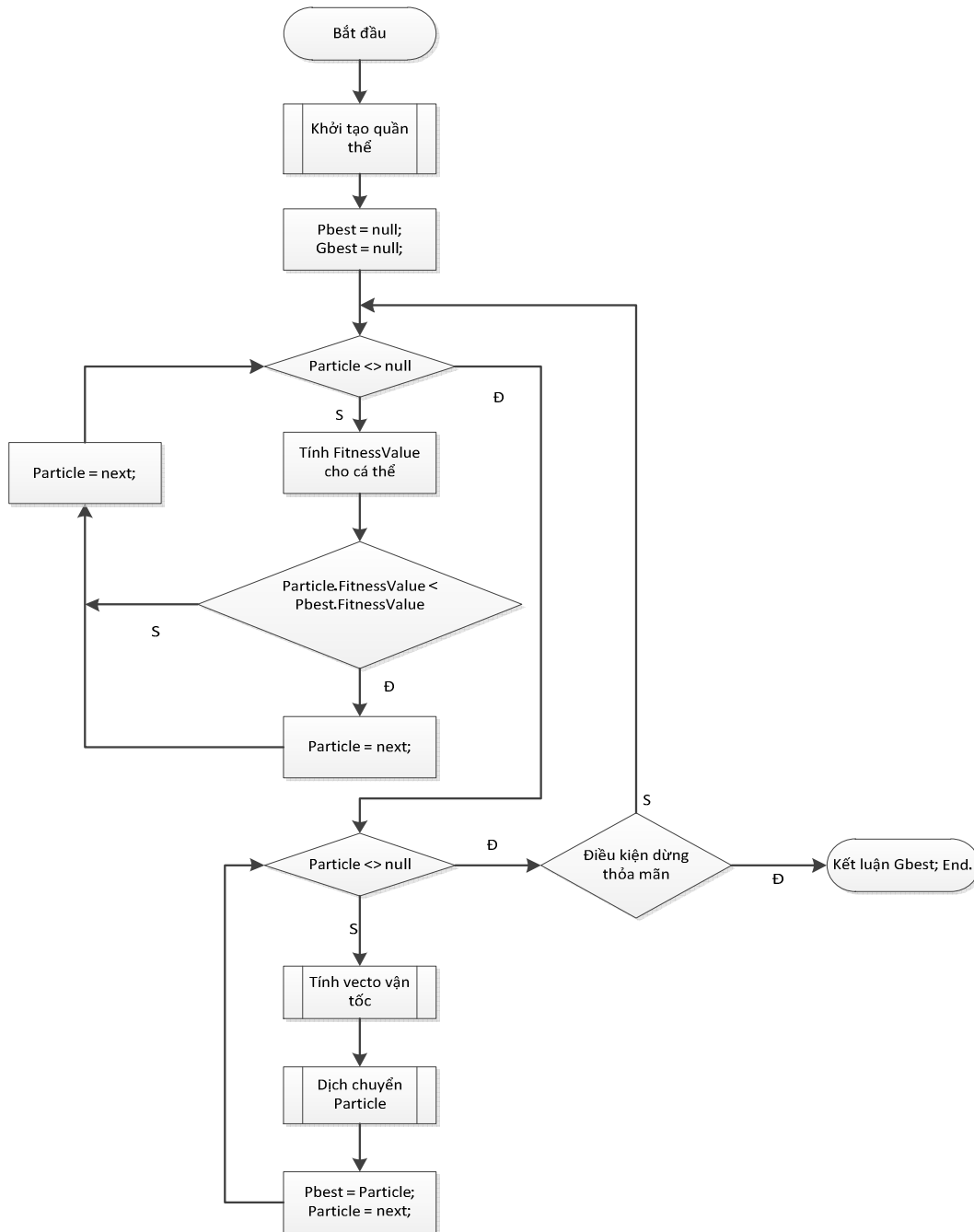
#### ➤ Ý tưởng

Chúng tôi đề xuất sử dụng thuật toán tối ưu bầy đàn có cải tiến để giải quyết bài toán cực tiểu hóa độ trễ (Minimum Latency Problem – MLP). Chúng ta sẽ bắt đầu bằng việc khởi tạo một tập các phương án (bầy đàn) mà mỗi phương án thể hiện một. Theo quá trình của thuật toán PSO, ta dịch chuyển bầy đàn qua nhiều vòng lặp rồi tìm ra phương án tốt nhất chấp nhận được.

#### ➤ Thuật toán

##### – *Lược đồ thuật toán*

Thuật toán PSO phải xác định các thủ tục chính sau đây: Khởi tạo bầy đàn, lựa chọn Pbest, cập nhật cho Gbest, xác định vector dịch chuyển cho mỗi cá thể dựa trên tiêu chí đã chọn, dịch chuyển cá thể theo vector. Quá trình lặp lại cho đến khi thỏa mãn điều kiện dừng của thuật toán. Trong bài báo này chúng tôi đề xuất điều kiện dừng của thuật toán là sau 10 vòng lặp mà Pbest và Gbest không thay đổi nhiều.



### – Khởi tạo quần thể

Vi đồ thị đã cho là đồ thị đầy đủ và yêu cầu là đường đi đơn xuất phát từ một đỉnh  $s$  bất kì cho trước đi qua các đỉnh của đồ thị nên ta sẽ mã hóa một phương án là mỗi cá thể là một chuỗi hoán vị  $\overline{1..n}$ . Trong đó  $1..n$  là chỉ số các đỉnh trong đồ thị INPUT và mỗi chuỗi

sẽ bắt đầu bằng đỉnh  $s$ . Số lượng tối đa các phương án trong không gian nghiệm của bài toán là  $(n-1)!$ . Độ thích nghi của cá thể sẽ được tính là tỉ lệ nghịch với độ trễ của chuỗi hoán vị đã khởi tạo. Như vậy cá thể nào càng có độ thích nghi càng cao thì sẽ càng gần với nghiệm của bài toán.

Số lượng hay kích thước ban đầu của quần thể là  $m$ , đóng vai trò quan trọng trong giải thuật vì kích thước quần thể quyết định sự hội tụ nhanh hay chậm của giải thuật, và khả năng thoát ra khỏi những cực trị địa phương của quần thể. Kích thước quần thể nhỏ thì giải thuật sẽ hội tụ nhanh nhưng thường sẽ cho ra kết quả là các cực trị địa phương chứ không phải là cực trị toàn cục. Vì với số lượng cá thể ít thì quần thể dễ mắc vào những cực trị địa phương và khó thoát ra được. Tuy nhiên, số lượng cá thể quá lớn lại làm thuật toán tốn nhiều thời gian, hội tụ chậm. Với bài toán cực tiểu hóa độ trễ, chúng tôi chọn số lượng cá thể là  $m=30$ .

Về phương pháp khởi tạo quần thể cũng có nhiều cách khác nhau. Phương pháp đơn giản nhất là `random()`. Như thế ta sẽ có 30 chuỗi hoán vị  $\overline{1..n}$ .

#### –Xác định $Pbest$ và $Gbest$

Xác định  $Pbest$  thể hiện qua giả mã sau:

1	<code>DelayNode(i)</code>
2	<b>Begin</b>
3	For $j = 1$ to $i-1$ do
4	<b>Begin</b>
5	<code>DelayNode = DelayNode + Distance(j, j+1)</code>
6	<b>End;</b>
7	<b>Return</b> <code>DelayNode;</code>
8	<b>END;</b>
9	
10	$DelayPath = \sum_{i=2}^n DelayNode(i)$
11	
<b>Tính FitnessValue</b>	
	<code>ForEach Particle</code>
	<b>Begin</b>
	<code>DelayPath(Particle);</code>
	If <code>Particle.DelayPath() &lt; Pbest.DelayPath()</code> then
	<code>Pbest = Particle;</code>
	<b>END;</b>
	If <code>Pbest &lt; Gbest</code> then <code>Gbest = Pbest</code>
<b>Xác định <math>Pbest</math> và <math>Gbest</math></b>	

### – *Tính vector vận tốc và dịch chuyển cá thể*

Như đã trình bày thì PSO hiện nay có một số cải tiến so với phiên bản gốc [4]. Để cải tiến trong việc tính toán vector vận tốc, cần dựa trên ba yếu tố:

- + Vị trí phần tử Gbest: Đại diện cho vị trí tối ưu cả bầy đàn
- + Vị trí phần tử Pbest: đại diện cho sự dịch chuyển bầy đàn thời điểm hiện tại
- + Vector dịch chuyển từ vòng lặp trước

Vấn đề là ta sẽ tính vector dịch chuyển cho từng yếu tố như thế nào. Trong bài báo này, chúng tôi tính vector dịch chuyển bằng cách dựa trên các khoảng cách từ mỗi đỉnh tới đỉnh xuất phát. Theo đề xuất này chúng ta so khớp từng cặp đỉnh của hai cá thể. Mỗi đỉnh cách đỉnh xuất phát với khoảng cách là bao nhiêu thì lấy hiệu làm hệ số cho vector dịch chuyển. Nghĩa là sử dụng chính khoảng cách từ các đỉnh tới đỉnh A làm vector đại diện.

Giả sử ta đang xét phần tử X có vector cùng tên đang cần dịch chuyển về phía Pbest và Gbest cùng với một vector dịch chuyển của X từ vòng lặp trước.

Sau cùng ta tính vector dịch chuyển của X tại vòng lặp này theo công thức (1) với hệ số  $C_1 = C_2 = C_3 = 2$ ;

Sau khi có được vector dịch chuyển, ta dịch chuyển phần tử X thực chất là đổi vị trí các đỉnh trong chuỗi hoán vị sao cho nó tiếp cận càng gần với mục tiêu càng tốt. Do đó để dịch chuyển cá thể hiện tại ta xét từng giá trị tương ứng trên vector.

Vector dịch chuyển có n giá trị đầu tiên luôn là 0 (vì đỉnh xuất phát là cố định). Số đỉnh cần chọn còn lại là  $n - 1$  đỉnh. Chúng ta có chiến lược như sau: Chọn đỉnh tương ứng trong số đỉnh còn lại mà có khoảng cách tới đỉnh xuất phát gần nhất với giá trị tương ứng trong vector dịch chuyển.

## 4. THỰC NGHIỆM

### ➤ Bộ dữ liệu kiểm thử

Dữ liệu kiểm thử được lấy từ thư viện dữ liệu chuẩn đã được sử dụng rộng rãi trong các bài toán tối ưu. Dữ liệu chúng tôi chọn để kiểm thử cho đề xuất trong công trình này là bộ TSPLIB [12]. Đây là bộ dữ liệu kiểm thử cho bài toán người bán hàng nhưng thỏa mãn điều kiện đầu vào cho bài toán MLP. Đây là một thư mục các tệp dữ liệu. Mỗi tệp lưu trữ tọa độ các đỉnh. Một tệp cùng tên với đuôi mở rộng tour chứa chuỗi đỉnh là đường đi ngắn nhất mà tới thời điểm hiện tại đã tìm được. Dựa theo chuỗi đỉnh này chúng ta cũng có thể tính ra tổng độ trễ của hành trình. Đây là đối trọng để ta đánh giá hiệu quả của thuật toán.

Bộ dữ liệu khá phong phú nên chúng tôi chọn ra một số tệp dữ liệu đại diện có kích thước không quá lớn (số đỉnh 50-100) và độ phân bố đều.

### ➤ Kết quả thực nghiệm

Dữ liệu chọn thử nghiệm và kết quả thử nghiệm thể hiện dưới bảng sau, trong đó, kết quả bằng thuật toán GA được lấy từ [1,2]. OPT và BestSol lần lượt là độ trễ cực tiểu của bộ dữ liệu chuẩn và độ trễ cực tiểu được giải bằng các thuật toán GA và PSO. T là thời gian chạy của thuật toán tính bằng phút.

Tập dữ liệu	OPT	GA		PSO	
		BestSol	T		
eil51	6140	6140	2,5	6232	1,6
eil76	5894	5894	2,6	6002	1,7
st70	7801	7801	2,5	8235	2,4
kroA100	239680	241012	2,6	242302	2,5

## 5. KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

Bài toán MLP là một bài toán thuộc lớp NP- khó đang được quan tâm giải quyết. Hướng tiếp cận giải bài toán theo thuật toán tối ưu bầy đàn có kết quả khá khả quan. Mặc dù kết quả thực nghiệm còn thấp có thể do thuật toán đề xuất theo mô hình cổ điển có thể bị rơi vào cực trị địa phương và bầy đàn không thể thoát ra được. Trong những bài báo tiếp theo, chúng tôi sẽ tiếp tục cải thiện kết quả bằng cách khắc phục sự hội tụ sớm và nâng cao chất lượng lời giải.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ban Hà Bằng, Nguyễn Đức Nghĩa (2009), “Giải thuật di truyền giải bài toán cực tiểu hóa độ trễ”, *Tạp chí Khoa học và Công nghệ các trường Kỹ thuật*, Số 71.
2. Ban Hà Bằng, Nguyễn Đức Nghĩa (2013), “Thuật toán di truyền lai ghép thuật toán đàn kiến giải bài toán cực tiểu hóa độ trễ”, *Tạp chí Tin học và Điều khiển học*, Số 3, T.29.
3. Nguyễn Gia Như (2014), *Một số thuật toán tiến hóa giải bài toán tối ưu trong mạng máy tính Luận án Tiến sĩ Toán học*, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Hà Nội.
4. Y. Shi & R. Eberhart (1998), “A modified particle swarm optimizer”, *IEEE 1998 International Conference*.
5. Yuhui Shi and Russell C.Eberhart (1998), “Parameter Selection In Particle Swarm Optimization”, Springer-Verlag London, UK.
6. James Kennedy and Russell Eberhart (1995), “Particle Swarm Optimization”, *IEEE International Conference on Neural Network*.

7. Rene Sitter (2002), “The Minimum Latency Problem Is NP-Hard for Weighted Trees”, *Integer Programming and Combinatorial Optimization*.
8. Michel Goemans Jon Kleinberg (1998), “An improved approximation ratio for the minimum latency problem”, *Mathematical Programming*, Vol.82.
9. R. Bellman (2003), “Dynamic Programming”, *Dover Publications Inc*.
10. G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey (1998), “Integer and Combinatorial Optimization”, *Wiley-Interscience*.
11. F. Rossi, P. Van Beek, and T. Walsh (2006), “Eds. Handbook of Constraint Programming”, *Elsevier*.
12. V. Vazirani (2001), “Approximation Algorithms”, *Springer publisher*. <https://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/>

## APPLYING PARTICLE SWARM OPTIMIZATION FOR MINIMUM LATENCY PROBLEM

**Abstract:** *Minimum Latency Problem – MLP is one of the class of combinatorial optimization problems that has many practical applications. In the general case, the MLP is proved to be NP-hard. In fact, there are many the approaches to solve the problem. One of them is using meta-heuristic. This algorithms imitate follow a action of some swarm in the nature. In this paper, we propose are apply algorithm particle swarm optimization for solve MLP with a lager size. The results show that is an efficient approaches for minimum latency problems.*

**Keywords:** *Minimum latency problems, Particle Swarm Optimization, meta – heuristic, GA – Genetic Algorithm.*



## CONTRIBUTION OF THE SCALAR UNPARTICLE ON PROCESS $e^+e^- \rightarrow hh$ IN THE RANDALL-SUNDRUM MODEL

Bui Thi Ha Giang<sup>1</sup>, Dao Thi Le Thuy<sup>1</sup>, Dang Van Soa<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Hanoi National University of Education

<sup>2</sup>Hanoi Metropolitan University

**Abstract:** The pair production of Higgs is studied with the contribution of the scalar unparticle in the  $e^+e^-$  collision in the Randall-Sundrum model in detail. We evaluate the observable cross-section which depends on the collision energy  $\sqrt{s}$  and the scaling dimension of the unparticle operator  $d_U$ . The total cross-section with the unparticle contribution is compared to that without the unparticle.

**Keywords:** Higgs, scalar unparticle, cross section, Randall-Sundrum model.

Email: giangbth@hnue.edu.vn

Received 15 July 2017

Accepted for publication 10 September 2017

### 1. INTRODUCTION

The Standard model (SM) of particle is successful in describing the elementary particle picture. In the Lagrangian of the SM, the scale invariance is broken at or above the electroweak scale [1, 2]. Because of no particle states with a definite nonzero mass, there are no particles with a nonzero mass in a scale invariant sector in four space-time dimensions [1, 3]. Georgi has suggested that if the scale invariance exists, it is made of unparticles. Based on the Banks-Zaks theory [4], unparticle stuff with nontrivial scaling dimension is considered to exist in our world. The invariant Banks-Zaks field can be connected to the SM particles. Recently, the evidence of the unparticle has been studied with CMS detector at the LHC [5, 6].

Although the SM describes successfully almost all existing experimental data, the model suffers from many theoretical drawbacks. One of many attempts to extend the SM and solve the hierarchy problem, one of theoretical drawbacks of SM [7], is the Randall-Sundrum (RS) model. The RS setup involves two three-branes bounding a slice of 5D compact anti-de Sitter space taken to be on an  $S^1/Z_2$  orbifold. Gravity is localized UV

brane, while the Standard Model (SM) fields are supposed to be localized IR brane. The separation between the two 3-branes leads directly to the existence of an additional scalar called the radion ( $\phi$ ), corresponding to the quantum fluctuations of the distance between the two 3-branes [8]. In 2012, Higgs signal at 125 GeV is discovered by the ATLAS and CMS collaborations [9, 10].

However, the unparticle effects on the collisions have not been concerned in the RS model. In this paper, we study the Higgs couple production, which has been proposed as an option of  $e^+e^-$  collisions. The layout of this paper is as follows. The unparticle and effective interactions are reviewed in Section 2 mostly cited on [1, 2, 3]. Section 3 is devoted to the creation of Higgs couple in  $e^+e^-$  collision. Finally, we summarize our results and make conclusions in Section 4.

## 2. THE UNPARTICLE AND EFFECTIVE INTERACTIONS

The derivation of the virtual unparticle propagator is based on the scale invariance [2]. The unparticle propagators for scalar, vector and tensor operators are given by [2], respectively

$$\Delta_{scalar} = \frac{iA_{d_U}}{2\sin(d_U\pi)}(-q^2)^{d_U-2}, \quad (1)$$

$$\Delta_{vector} = \frac{iA_{d_U}}{2\sin(d_U\pi)}(-q^2)^{d_U-2}\pi_{\mu\nu}, \quad (2)$$

$$\Delta_{tensor} = \frac{iA_{d_U}}{2\sin(d_U\pi)}(-q^2)^{d_U-2}\Gamma_{\mu\nu,\rho\sigma}, \quad (3)$$

where  $d_U$  is the noninteger scaling dimension of the unparticle operator,

$$A_{d_U} = \frac{16\pi^2\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{2d_U}} \frac{\Gamma\left(d_U + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(d_U - 1)\Gamma(2d_U)}, \quad (4)$$

$$(-q^2)^{d_U-2} = \begin{cases} |q^2|^{d_U-2} e^{-id_U\pi} & \text{for s-channel process, } q^2 \text{ is positive,} \\ |q^2|^{d_U-2} & \text{for u-, t-channel process, } q^2 \text{ is negative,} \end{cases} \quad (5)$$

$$\pi^{\mu\nu}(q) = -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}, \quad (6)$$

$$T^{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left\{ \pi^{\mu\rho}(q)\pi^{\nu\sigma}(q) + \pi^{\mu\sigma}(q)\pi^{\nu\rho}(q) - \frac{2}{3}\pi^{\mu\nu}(q)\pi^{\rho\sigma}(q) \right\}. \quad (7)$$

The effective interactions for the scalar, vector and tensor unparticle operators are given by, respectively

$$\lambda_0 \frac{1}{\Lambda_U^{d_U-1}} \bar{f} f O_U, \lambda_0 \frac{1}{\Lambda_U^{d_U-1}} \bar{f} i \gamma^5 f O_U, \lambda_0 \frac{1}{\Lambda_U^{d_U}} \bar{f} \gamma^\mu f (\partial_\mu O_U), \lambda_0 \frac{1}{\Lambda_U^{d_U}} G_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} O_U, \quad (8)$$

$$\lambda_1 \frac{1}{\Lambda_U^{d_U-1}} \bar{f} \gamma_\mu f O_U^\mu, \lambda_1 \frac{1}{\Lambda_U^{d_U-1}} \bar{f} \gamma_\mu \gamma_5 f O_U^\mu, \quad (9)$$

$$-\frac{1}{4} \lambda_2 \frac{1}{\Lambda_U^{d_U}} \bar{\psi} i (\gamma_\mu \bar{D}_\nu + \gamma_\nu \bar{D}_\mu) \psi O_U^{\mu\nu}, \lambda_2 \frac{1}{\Lambda_U^{d_U}} G_{\mu\alpha} G_\nu^\alpha O_U^{\mu\nu}, \quad (10)$$

where  $\lambda_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) stand for the scalar, vector and tensor unparticle operators, respectively.  $D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a + ig' \frac{Y}{2} B_\mu$  is the covariant derivative,  $B, W^i$  are gauge fields,  $Y, \frac{\tau^a}{2}$  correspond to the standard generators of  $U(1)_Y$  and  $SU(2)_L$ . The corresponding coupling constants are denoted by  $g, g'$ .  $f$  stands for a standard model fermion,  $\psi$  stands for a standard model fermion doublet or singlet.  $G^{\alpha\beta}$  denotes the gauge field strength.

### 3. THE HIGGS PRODUCTION

In this section, we consider the  $e^+e^- \rightarrow hh$  collision process

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow h(k_1) + h(k_2), \quad (11)$$

Here  $p_i, k_i$  ( $i = 1, 2$ ) stand for the momenta. There are three Feynman diagrams contributing to reaction (11), representing the s, u, t-channels exchange depicted in Fig. 1.

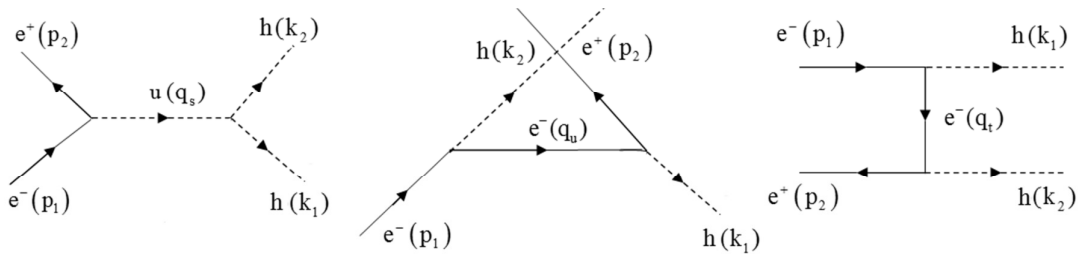


Figure 1. Feynman diagrams for  $e^+e^- \rightarrow hh$  collision.

We obtain the scattering amplitude in the s, u, t-channels, respectively

$$M_s = \frac{i\lambda_0}{\Lambda_U^{d_U}} \frac{A_{d_U}}{2\sin(d_U\pi)} (-q_s^2)^{d_U-2} \bar{v}(p_2) \frac{i\lambda_0}{\Lambda_U^{d_U-1}} u(p_1) \quad (12)$$

$$M_u = -i \frac{\bar{g}_{eeh}^2}{q_u^2 - m_e^2} \bar{v}(p_2) (\hat{q}_u + m_e) u(p_1) \quad (13)$$

$$M_t = -i \frac{\bar{g}_{eeh}^2}{q_t^2 - m_e^2} \bar{v}(p_2) (\hat{q}_t + m_e) u(p_1) \quad (14)$$

where  $\bar{g}_{eeh}$  are given by [11],  $q_s = p_1 + p_2 = k_1 + k_2$ ,  $q_u = p_1 - k_2 = k_1 - p_2$ ,  $q_t = p_1 - k_1 = k_2 - p_2$ .

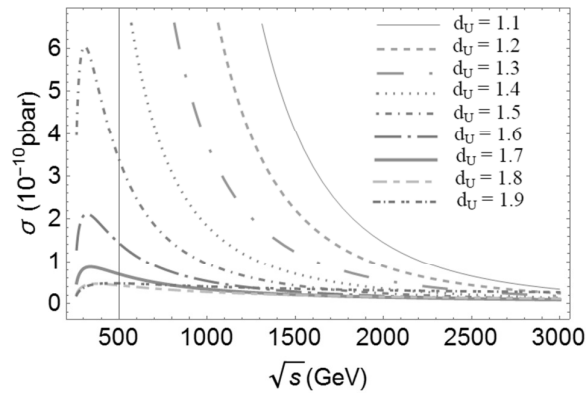
The expressions of the differential cross-section [12]

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\psi)} = \frac{1}{64\pi s} \frac{|\vec{k}|}{|\vec{p}|} |M_{fi}|^2, \quad (15)$$

where  $|M_{fi}|^2 = |M_s|^2 + |M_u|^2 + |M_t|^2 + 2\text{Re}(M_s^+ M_u + M_s^+ M_t + M_u^+ M_t)$ .

We give some estimates for the cross-sections as follows

i) In Fig.2, we evaluate the dependence of the total cross-section on the collision energy  $\sqrt{s}$  with the various  $d_U$ . We choose  $\lambda_0 = 1, \Lambda_U = 1000 \text{ GeV}$  [2]. In case of the scalar unparticle,  $1 < d_U < 2$  [13]. The total cross-sections decrease when the collision energy  $\sqrt{s}$  increases.



**Figure 2.** Total cross-sections for  $e^+e^- \rightarrow hh$  versus  $\sqrt{s}$  with the various  $d_U$

ii) The proportion of the total cross-sections with the unparticle contribution  $\sigma_U$  to that without the unparticle  $\sigma_0$  in Ref.14 is calculated in Table 1. The results show that the unparticle contribution is significant.

$\sqrt{s}$ (GeV)	$\sigma_U / \sigma_0$					
	$d_U = 1.1$	$d_U = 1.2$	$d_U = 1.3$	$d_U = 1.5$	$d_U = 1.7$	$d_U = 1.9$
300	4.3743	1.2514	0.3655	0.0353	0.0048	0.0022
500	6.9403	2.4403	0.8731	0.1265	0.0261	0.0178
800	9.2157	3.8971	1.6887	0.3578	0.1066	0.1063
1000	10.4242	4.8242	2.2788	0.5751	0.2055	0.2454
1500	13.2143	7.1753	3.9935	1.3961	0.6883	1.1396
2000	16.0221	9.8011	6.1105	2.6851	1.6685	3.4696
2500	19.5210	13.0539	8.8922	4.6706	3.4730	8.6227
3000	23.9716	17.2340	12.6950	7.7305	6.6383	19.078

#### 4. CONCLUSION

In this paper, the total cross-sections for the process  $e^+e^- \rightarrow hh$  with the unparticle contribution are evaluated. The results indicate that the cross-sections depend on the parameter  $d_U$  and the collision energy  $\sqrt{s}$ . They are larger in case of the small  $d_U$  and decrease when  $\sqrt{s}$  increases. When  $\sqrt{s} = 3000$  GeV and  $d_U = 1.1$ , the cross-section with the unparticle contribution is about 24 times as large as that without the unparticle.

**Acknowledgement:** The work is supported in part by Hanoi National university of Education project under Grant No. SPHN-16-05.

#### REFERENCES

1. H. Georgi (2007), *Phys. Rev. Lett.* **98** p.221601.
2. K. Cheung, W-Y. Keung and T-C. Yuan, *Phys. Rev.* **D76** p.055003.
3. S-L. Chen, X-G. He (2007), *Phys. Rev.* **D76** p.091702.
4. T. Banks and A. Zaks (1982), *Nucl. Phys.* **B196**, p.189.
5. CMS Collaboration (2015), *Eur. Phys. J.* **C75** p.235.
6. CMS Collaboration (2016), *Phys. Rev.* **D93** p.052011.
7. L. Randall and R. Sundrum (1999), *Phys. Rev. Lett.* **83** p.3370.
8. L. Randall and R. Sundrum (1999), *Phys. Rev. Lett.* **83** p.4690.
9. M. Frank, K. Huitu, U. Maitra, M. Patra (2016), *Phys. Rev.* **D94** p.055016.
10. G. Aad et al. (2012), ATLAS Collaboration, *Phys. Lett.* **B716** pp.1-29.
11. S. Chatrchyan et al. (2012), CMS Collaboration, *Phys. Lett.* **B716** pp.30-61.
12. D. Dominici, B. Grzadkowski, J. F. Gunion and M. Toharia (2003), *Nucl.Phys.* **B671** p.243.

13. M. E. Peskin and D. V. Schroeder (1995), “An Introduction to Quantum Field Theory”, Addison-Wesley Publishing.
14. A. Friedland, M. Giannotti, M. Graesser (2009), *Phys. Lett.* **B678** pp.149-155.
15. B. T. H. Giang and D. T. L. Thuy (2016), *Journal of science of HNUE*, Vol. **61**, No. 7, pp.58-64.

## ĐÓNG GÓP CỦA PHI HẠT VÔ HƯỚNG VÀO QUÁ TRÌNH $e^+e^- \rightarrow hh$ TRONG MÔ HÌNH RANDALL-SUNDRUM

**Tóm tắt:** Sự tạo cặp của Higgs trong mô hình Randall-Sundrum từ va chạm  $e^+e^-$  với sự đóng góp của U-hạt vô hướng được nghiên cứu chi tiết. Chúng tôi đánh giá tiết diện quan sát phụ thuộc vào năng lượng va chạm và số chiều toán tử U-hạt. Tiết diện toàn phần có đóng góp của U-hạt được so sánh với trường hợp không có đóng góp của U-hạt.

**Từ khóa:** Tạo Higgs, U-hạt vô hướng, tiết diện, mẫu Randall-Sundrum.

## ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Nguyễn Văn Hào<sup>1</sup>, Nguyễn Thị Thanh Hà<sup>2</sup>, Vũ Thị Ngọc Diệu<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2

<sup>2</sup> Trường Đại học Công nghiệp Việt Trì

**Tóm tắt:** Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số phương pháp xây dựng các bài toán về giới hạn của hàm số từ định lý giá trị trung bình bằng kỹ thuật tạo dựng các hàm phụ.

**Từ khóa:** Định lý giá trị trung bình, giới hạn của dãy số, hàm số liên tục, hàm số khả vi.

Nhận bài ngày 10.7.2017; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 10.9.2017  
Liên hệ tác giả: Nguyễn Văn Hào; Email: nguyenvanhaodhsphn2@gmail.com

### 1. MỞ ĐẦU

Các định lý cơ bản về đạo hàm đóng vai trò quan trọng trong Toán học, cũng như nhiều lĩnh vực khoa học khác. Điều đó, người ta có thể kể đến một số vấn đề như: bài toán tồn tại nghiệm của các phương trình đại số, ước lượng khoảng chứa nghiệm của các phương trình và toán tử trong việc giải gần đúng của lý thuyết số, bài toán tìm cực trị của hàm số... Khởi nguồn của các định lý giá trị trung bình là Định lý Rolle được phát biểu như sau:

**Định lý 1** (Định lý Rolle): *Giả sử hàm  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$ , khả vi trên khoảng  $(a, b)$  và thỏa mãn điều kiện  $f(a) = f(b)$ . Khi đó, tồn tại ít nhất một số  $c \in (a, b)$  sao cho  $f'(c) = 0$ .*

Theo một khía cạnh, nhìn lại cách chứng minh của định lý Lagrange và định lý Cauchy, chúng ta thấy hai định lý đó là hệ quả của định lý Rolle nhờ việc thiết lập hai hàm phụ cũng thỏa mãn các giả thiết của định Rolle tương ứng là:

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Và: 
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Từ việc thiết lập các hàm phụ đó, ta nhận được hai định lý quan trọng sau:

**Định lý 2** (Định lý Lagrange): *Giả sử hàm số  $f(x)$  hàm liên tục trên đoạn  $[a, b]$  và khả vi trên khoảng  $(a, b)$ . Khi đó tồn tại số  $c \in (a, b)$  sao cho:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Hay:  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

**Định lý 3** (Định lý Cauchy): *Giả sử các hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  liên tục trên đoạn, khả vi trên khoảng  $(a, b)$  và ngoài ra  $g'(x)$  khác 0 với mọi giá trị của  $x$  thuộc khoảng  $(a, b)$ . Khi đó, tồn tại điểm  $c \in (a, b)$  sao cho:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Các kết quả này chúng tôi không trình bày cách chứng minh ở đây, chi tiết có thể tham khảo trong tài liệu [1]. Một cách tổng quan, ta có thể nói rằng hai định lý Lagrange và định lý Cauchy nhận được từ việc kết hợp từ hàm  $f(x)$  (mà ở đây chúng ta gọi nó là “hàm gốc”) liên tục trên đoạn  $[a, b]$  và khả vi trên khoảng  $(a, b)$  với những điều kiện phụ nào đó để được những kết quả mới. Theo ý tưởng đó, chúng tôi sử dụng một số giới hạn cơ bản một số hàm sơ cấp kết hợp với hàm gốc  $f(x)$  để có được các bài toán mới về giới hạn của hàm số

## 2. MỘT SỐ CÁCH XÂY DỰNG BÀI TOÁN GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ TỪ CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA ĐẠO HÀM

### 2.1. Các giới hạn cơ bản của hàm số một biến số

Để thuận lợi cho việc trình bày kết quả, chúng ta nhắc lại một số giới hạn cơ bản sau:

1.  $\lim_{\alpha(n) \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha(n)} - 1}{\alpha(n)} = 1.$
2.  $\lim_{\alpha(n) \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \alpha(n))}{\alpha(n)} = 1$
3.  $\lim_{\alpha(n) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{\alpha(n)}\right)^{\alpha(n)} = e^a.$
4.  $\lim_{\alpha(n) \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(n)}{\alpha(n)} = 1$
5.  $\lim_{\alpha(n) \rightarrow 0} \frac{\tan \alpha(n)}{\alpha(n)} = 1.$



## 2.2. Xây dựng một số bài toán qua việc kết hợp hàm gốc với các giới hạn cơ bản

Trong phần này, chúng ta xây dựng một số bài toán về giới hạn của dãy số bằng cách thiết lập những dãy hàm số thoả mãn các giả thiết của định lý Rolle.

**Bài toán 1.** Cho hàm số  $f(x)$  khả vi trên đoạn  $[a, b]$ . Giả sử rằng  $f(a) = f(b) = 0$  và  $f(x) \neq 0$  với mọi  $x \in (a, b)$ . Chứng minh rằng tồn tại dãy  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  trong khoảng  $(a, b)$  sao cho:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e} - 1)f(x_n)} = 2017.$$

Để chứng minh bài toán này, chúng ta xét hàm số:

$$H_n(x) = e^{-\frac{2017x}{n}} f(x); x \in (a, b).$$

Đạo hàm của  $H_n(x)$  là:

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= -\frac{2017}{n} e^{-\frac{2017x}{n}} f(x) + e^{-\frac{2017x}{n}} f'(x) \\ &= e^{-\frac{2017x}{n}} \left( f'(x) - \frac{2017}{n} f(x) \right). \end{aligned}$$

Từ giả thiết  $f(x)$  khả vi trên đoạn  $[a, b]$  và  $f(a) = f(b) = 0$ , chúng ta suy ra  $H_n(x)$  thoả mãn các điều kiện của định lý Rolle. Do đó, tồn tại dãy  $\{x_n\} \subset (a, b)$  sao cho  $H_n'(x_n) = 0$ . Từ đó, ta có:

$$\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} = \frac{2017}{n}.$$

Sử dụng giới hạn cơ bản 1 trong mục 2.1, chúng ta thu được:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e} - 1)f(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2017}{(\sqrt[n]{e} - 1)n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2017}{\frac{1}{\sqrt[n]{e} - 1}} = 2017.$$

Giữ nguyên hàm  $H_n(x) = e^{-\frac{2017x}{n}} f(x)$  và sử dụng các giới hạn cơ bản khác, chúng ta nhận được các bài toán sau:

**Bài toán 2.** Cho hàm  $f(x)$  khả vi trên  $[a, b]$  và thỏa mãn điều kiện  $f(a) = f(b) = 0$ . Chứng minh rằng, nếu  $f(x)$  không đồng nhất bằng 0 trên khoảng  $(a, b)$  thì tồn tại một dãy  $\{x_n\}$  trong khoảng  $(a, b)$  sao cho:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{f'(x_n)}{f(x_n)} \right)^n = e^{2017}.$$

**Bài toán 3.** Cho hàm  $f(x)$  khả vi trên  $[a, b]$  và  $f(a) = f(b) = 0$ . Chứng minh rằng nếu  $f(x)$  không đồng nhất bằng 0 trên khoảng  $(a, b)$  thì tồn tại một dãy  $\{x_n\}$  trong khoảng  $(a, b)$  sao cho:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \ln \left( 1 + \frac{f'(x_n)}{f(x_n)} \right) \right] = 2017.$$

**Bài toán 4.** Cho hàm  $f(x)$  khả vi trên  $[a, b]$  và  $f(a) = f(b) = 0$ . Chứng minh rằng nếu  $f(x)$  không đồng nhất bằng 0 trên khoảng  $(a, b)$  thì tồn tại một dãy  $\{x_n\}$  trong khoảng  $(a, b)$  sao cho:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \sin \frac{f'(x_n)}{f(x_n)} \right] = 2017.$$

**Bài toán 5.** Cho hàm  $f(x)$  khả vi trên  $[a, b]$  và  $f(a) = f(b) = 0$ . Chứng minh rằng nếu  $f(x)$  không đồng nhất bằng 0 trên khoảng  $(a, b)$  thì tồn tại một dãy  $\{x_n\}$  trong khoảng  $(a, b)$  sao cho:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \tan \frac{f'(x_n)}{f(x_n)} \right] = 2017.$$

### 2.3. Một số hàm khác

Ngoài hàm  $H_n(x)$  được xét trong bài toán mở đầu, ta có thể lập các hàm khác. Tương ứng với mỗi hàm cùng giới hạn cơ bản, ta được các bài toán mới như sau:

**2.3.1. Xét hàm**

$$D_n^1(x) = e^{-\frac{x^\alpha}{n}} f(x).$$

Hàm này có đạo hàm là:

$$\begin{aligned} \left(D_n^1(x)\right)' &= -\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{n} e^{-\frac{x^\alpha}{n}} f(x) + e^{-\frac{x^\alpha}{n}} f'(x) \\ &= e^{-\frac{x^\alpha}{n}} \left( f'(x) - \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{n} f(x) \right). \end{aligned}$$

Khi hàm  $D_n^1(x)$  thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle nhận được từ giả thiết của hàm gốc cho ta khẳng định  $\left(D_n^1(x_n)\right)' = 0$ . Điều đó, tương đương với:

$$\frac{f'(x_n)}{x_n^{\alpha-1} f(x_n)} = \frac{\alpha}{n}.$$

Từ đó, chúng ta có bài toán:

**Bài toán 7.** Cho hàm  $f(x)$  khả vi trên đoạn  $[a, b]$  và giá trị của hàm tại hai đầu mút đều bằng 0. Chứng minh rằng nếu  $f(x)$  không đồng nhất bằng 0 trên khoảng  $(a, b)$  thì tồn tại một dãy  $\{x_n\}$  trong khoảng  $(a, b)$  thỏa mãn:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e} - 1)x_n^{\alpha-1} f(x_n)} = \alpha;$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{f'(x_n)}{x_n^{\alpha-1} f(x_n)} \right)^n = e^\alpha;$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \ln \left( 1 + \frac{f'(x_n)}{x_n^{\alpha-1} f(x_n)} \right) \right] = \alpha;$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \sin \frac{f'(x_n)}{x_n^{\alpha-1} f(x_n)} \right) = \alpha;$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \tan \frac{f'(x_n)}{x_n^{\alpha-1} f(x_n)} \right) = \alpha.$$

### 2.3.2. Xét hàm

$$D_n^2(x) = f(x) \cdot \cos \frac{x}{n}.$$

Đạo hàm của hàm này là:

$$\left( H_n^2(x) \right)' = f'(x) \cos \frac{x}{n} - \frac{1}{n} f(x) \sin \frac{x}{n}.$$

Điều kiện  $\left( D_n^2(x_n) \right)' = 0$  cho ta:

$$\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} = \frac{1}{n} \tan \frac{x_n}{n}.$$

Từ đó, ta nhận được bài toán:

**Bài toán 8.** Cho hàm  $f(x)$  khả vi trên  $\left[ 0; \frac{\pi}{4} \right]$  và  $f(0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ . Khi đó, nếu

$f(x)$  không đồng nhất bằng 0 trên khoảng  $\left( 0; \frac{\pi}{4} \right)$  thì tồn tại một dãy  $\{x_n\}$  trong khoảng

đó sao cho:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 f'(x_n)}{x_n f(x_n)} = 1.$$

Tương tự như vậy, đối với hàm:

$$H_n^3(x) = f(x) \cot \frac{x}{n}; \text{ với } x \in \left[ 0; \frac{\pi}{4} \right],$$

chúng ta nhận được:

**Bài toán 9.** Cho hàm  $f(x)$  khả vi trên  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  và  $f(0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ . Khi đó nếu  $f(x)$  không đồng nhất bằng 0 trên khoảng đó thì tồn tại dãy  $\{x_n\} \subset \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  sao cho:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n f'(x_n)}{f(x_n)} = 1.$$

Kết thúc phần này chúng ta trình bày lời giải đầy đủ của bài toán sau:

**Bài toán 10.** Cho hàm số  $f(x)$  khả vi trên  $[a, b]$  và  $f(a) = f(b) = 0$ . Giả sử  $f(x)$  không đồng nhất bằng 0 trên  $(a, b)$ . Chứng minh rằng tồn tại dãy  $\{x_n\} \subset (a, b)$  sao cho:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n f'(x_n)}{f(x_n)} = -2017.$$

Trong bài toán này, chúng ta xét hàm phụ:

$$D_n^4(x) = f(x) \ln \left(1 + \frac{x^{2017}}{n}\right).$$

Ta có:

$$\left(D_n^4(x)\right)' = f'(x) \ln \left(1 + \frac{x^{2017}}{n}\right) + f(x) \frac{2017 \cdot \frac{x^{2016}}{n}}{1 + \frac{x^{2017}}{n}}.$$

Từ các điều kiện của hàm  $f(x)$  chúng ta thấy rằng hàm  $D_n^4(x)$  thỏa mãn điều kiện của định lý Rolle trên đoạn  $[a, b]$ . Từ đó, suy ra tồn tại dãy  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a, b)$  sao cho:

$$\left(D_n^4(x_n)\right)' = 0, \text{ tức là:}$$

$$\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} = - \frac{\frac{2017}{n} x_n^{2016}}{\left(1 + \frac{x_n^{2017}}{n}\right) \ln \left(1 + \frac{x_n^{2017}}{n}\right)}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n f'(x_n)}{f(x_n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\frac{2017}{n} x_n^{2017}}{\left(1 + \frac{x_n^{2017}}{n}\right) \ln \left(1 + \frac{x_n^{2017}}{n}\right)} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{2017}{\left(1 + \frac{x_n^{2017}}{n}\right)} \cdot \frac{\frac{x_n^{2017}}{n}}{\ln \left(1 + \frac{x_n^{2017}}{n}\right)} \right] = -2017. \end{aligned}$$

### 3. KẾT LUẬN

Bằng việc sử dụng những tính chất đặc trưng của hàm sơ cấp và kỹ thuật tạo dựng hàm phụ, chúng ta cũng thấy được một phương pháp vận dụng kết hợp giữa giới hạn cơ bản với định lý giá trị trung bình để có được một lớp các bài toán giới hạn về dãy số khá đặc sắc.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Trần Đức Long, Nguyễn Đình Sang, Hoàng Quốc Toàn (2008), *Giáo trình giải tích tập 2*, - Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.
2. P. Ahern, M. Flores and W. Rudin (1993), "An invariant volume-mean value property", *J. Funct. Anal.* 111, pp.380-397.
3. W. A. Granville (2008), *Elements of the Differential and Integral Calculus* (revised edition).
4. W. J. Kaczor, M. T. Nowak (2001), *Problems in Mathematical Analysis II: Continuity and Differentiation*, Student mathematical library, Volume 12, pp.45-52.
5. K. Ramachandra (1995), *Lectures on the Mean-Value and Omega-Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg - New York-Tokyo.

### APPLICATION OF MEAN VALUE THEOREM IN PROBLEMS OF SEQUENCE LIMIT

**Abstract:** In this paper, we presented some methods of construction of sequence limit problems by mean - value theorems with technics of creation aid functions.

**Keywords:** volume-mean value theorem, sequence limit, continuous function, differential function.

# CONTROLLED TELEPORTATION WITH PARTIALLY ENTANGLED QUANTUM CHANNEL: DETERMINISM AND POWER OF THE CONTROLLER

Nguyen Van Hop

*Hanoi National University of Education*

**Abstract:** In this article we consider a controlled teleportation (i.e., teleportation under supervision of a controller) of a general two-qubit state via a quantum channel of the form  $|Q\rangle_{1233'45} = \sum_{m,n=0}^1 x_{mn} |B_{mn}\rangle_{12} |m, m \oplus n\rangle_{33'} |B_{00}\rangle_{45}$ , where  $\sum_{m,n=0}^1 |x_{mn}|^2 = 1$  and  $|B_{mn}\rangle_{12} = \sum_{j=0}^1 (-1)^{mj} |j, j \oplus n\rangle_{12}$ . We show in detail that, not only for  $|x_{mn}| = 1/2$  but even for  $|x_{mn}| \neq 1/2$  (i.e.,  $|Q\rangle_{1233'45}$  is not maximally entangled), any unknown two-qubit state can be teleported perfectly with the success probability of unit and the fidelity of one. We also prove that if  $|x_{00}| \geq 1/2$  then the teleported state's average fidelity  $F_{av}$  obtained without the controller's cooperation is not smaller than the classical fidelity  $F_{cl} = 2/5$ . Therefore, in order for the controller to play a useful role  $|x_{00}|$  should be chosen  $1/4 < |x_{00}| < 1/2$ .

**Keywords:** Controlled teleportation, arbitrary two-qubit state, partially entangled quantum channel, controller's power.

Email: hopnv@hnue.edu.vn

Received 13 July 2017

Accepted for publication 10 September 2017

## 1. INTRODUCTION

Quantum teleportation (QT) [1] is considered as one of the most successful invention in the quantum information research [2]. Which achieves the destination of quantum state transfer in a different way via prior shared entanglement as the quantum channel as well as the local operation and classical communication. Since the first protocol for teleporting an unknown qubit, the quantum teleportation protocols have been extensively studied in both theoretical and experimental aspects [3-14].

Later, combining with the idea of controlled communication, controlled quantum teleportation (CQT), which allows QT being performed under a third party's permission, has been paid much attention. The CQT has rapidly developed from the protocols have one

controller into the protocols have more than one controller. CQT for teleporting a single-particle state have been studied [10] and multiparticle quantum state from Alice to Bob under the control of many networked agents was also provided [11].

Recently, Xi-Han Li et al. [15] presented a quantity for measuring the controller's power and gave a reasonable criterion for an eligible controlled teleportation scheme of single-qubit and N-qubit state. They have shown that the control power can increase with the number of qubits held by the controller. However, increase is not endless. For teleporting N-qubit states, the maximum number of qubits owned by controller is 2N. The control power depends on the quantum channel and strategy.

In this article, the controlled teleportation protocol to teleport an arbitrary two-qubit state is presented. In our protocol, the original state can be teleported perfectly with the success probability of unit and the fidelity of one. Without controller's collaboration, the quantum average fidelity is smaller than the classical fidelity, therefore the power of controller is guaranteed.

## 2. CONTROLLED TELEPORTATION OF AN ARBITRARY TWO-QUBIT STATE

If the sender Alice wants to transmit an unknown arbitrary two-particle state receiver Bob, the unknown state can be expressed as:

$$|S\rangle_{AB} = \sum_{a,b=0}^1 \alpha_{ab} |a, b\rangle_{AB}, \quad (1)$$

where the coefficient satisfy normalized condition with  $\sum_{a,b=0}^1 |\alpha_{ab}|^2 = 1$ . The quantum channel that is composed of  $|Q\rangle_{1233'}$  and  $|B\rangle_{45}$  can be written as:

$$|Q\rangle_{1233'} = x_{00} |Q^{(1)}\rangle_{1233'} + x_{01} |Q^{(2)}\rangle_{1233'} + x_{10} |Q^{(3)}\rangle_{1233'} + x_{11} |Q^{(4)}\rangle_{1233'}, \quad (2)$$

with any parameters  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$  satisfying the normalization condition  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$ .

The states  $|Q^{(i)}\rangle_{1233'}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  can be written as

$$|Q^{(1)}\rangle_{1233'} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{c=0}^1 |c, c\rangle_{12} \right) |00\rangle_{33'}, \quad |Q^{(2)}\rangle_{1233'} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{c=0}^1 |c, c \oplus 1\rangle_{12} \right) |01\rangle_{33'}, \quad (3)$$

$$|Q^{(3)}\rangle_{1233'} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{c=0}^1 (-1)^c |c, c \oplus 1\rangle_{12} \right) |10\rangle_{33'}, \quad |Q^{(4)}\rangle_{1233'} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{c=0}^1 (-1)^c |c, c\rangle_{12} \right) |11\rangle_{33'}. \quad (4)$$



The  $|Q\rangle_{1233'}$  is proposed by Y. Yeo and W. K. Chua in [5]. The  $|B\rangle_{45}$  can be formed:

$$|B\rangle_{45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{d=0}^1 |d, d\rangle_{45}, \quad (5)$$

In this nonlocal resource Eq. (2), Alice has particles 1 and 4, Bob has particles 2 and 5, the controller Chalire has particles 3 and 3'. Therefore, the initial state can be given by:

$$\begin{aligned} |T_{22}\rangle &= |S\rangle_{AB} |Q\rangle_{1233'} |B\rangle_{45} \\ &= \sum_{a=0}^1 \sum_{b=0}^1 \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 \alpha_{ab} x_{mn} |a, b\rangle_{AB} |B_{mn}\rangle_{12} |m, m \oplus n\rangle_{33'} \otimes |B_{00}\rangle_{45}, \end{aligned} \quad (6)$$

with  $x_{00} = x, x_{01} = y, x_{10} = z,$  and  $x_{11} = t$ .

The four Bell states of two qubits are defined by:

$$|B_{m,n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^1 (-1)^{mi} |i, n \oplus i\rangle, \quad (7)$$

with  $m, n \in \{0, 1\}$  and  $\oplus$  an addition mod 2. This inverse transformation is:

$$|m, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^1 (-1)^{mi} |B_{i, m \oplus n}\rangle. \quad (8)$$

By virtue of Eqs. (7) and (8), we can rewrite  $|T_{22}\rangle$ , Eq. (6), in the form:

$$|T_{22}\rangle = |T_{22}^{(1)}\rangle + |T_{22}^{(2)}\rangle + |T_{22}^{(3)}\rangle + |T_{22}^{(4)}\rangle, \quad (10)$$

With:

$$|T_{22}^{(1)}\rangle = \frac{x}{4} \sum_{a,b,i,j,k,l=0}^1 (-1)^{ia \oplus kb} \alpha_{ab} |B_{i,j}\rangle_{A1} |B_{k,l}\rangle_{B4} |j \oplus a, l \oplus b\rangle_{25} |00\rangle_{33'}, \quad (11)$$

$$|T_{22}^{(2)}\rangle = \frac{y}{4} \sum_{a,b,i,j,k,l=0}^1 (-1)^{ia \oplus kb} \alpha_{ab} |B_{i,j}\rangle_{A1} |B_{k,l}\rangle_{B4} |j \oplus a + 1, l \oplus b\rangle_{25} |01\rangle_{33'}, \quad (12)$$

$$|T_{22}^{(3)}\rangle = \frac{z}{4} \sum_{a,b,i,j,k,l=0}^1 (-1)^{ia \oplus kb \oplus j \oplus a} \alpha_{ab} |B_{i,j}\rangle_{A1} |B_{k,l}\rangle_{B4} |j \oplus a + 1, l \oplus b\rangle_{25} |10\rangle_{33'} \quad (13)$$

And:

$$|T_{22}^{(4)}\rangle = \frac{t}{4} \sum_{a,b,i,j,k,l=0}^1 (-1)^{ia \oplus kb \oplus j \oplus a} \alpha_{ab} |B_{i,j}\rangle_{A1} |B_{k,l}\rangle_{B4} |j \oplus a, l \oplus b\rangle_{25} |11\rangle_{33'}. \quad (14)$$

It is now clear from Eq. (10) that if Alice makes Bell-state measurements on qubit pairs (A, 1), (B, 4) with outcomes  $\{i, j, k, l\}$  corresponding to find  $|B_{i,j}\rangle_{A1}$ ,  $|B_{k,l}\rangle_{B4}$  and

Charlie measures qubit 3 and qubit 3' in the computational basis  $\{|00\rangle_{33'}, |01\rangle_{33'}, |10\rangle_{33'}, |11\rangle_{33'}\}$  with outcomes  $\{s_1, s_2\}$  corresponding to finding  $|s_1 s_2\rangle_{33'}$ . If result measurement of Charlie is  $\{0, 0\}$  then the state of Bob's qubits 2 and 5, up to a global phase factor, is projected onto

$$|S^{(1)}\rangle_{25} = \sum_{a,b=0}^1 (-1)^{ia \oplus kb} \alpha_{ab} |j \oplus a, l \oplus b\rangle_{25}. \quad (15)$$

If result measurement of Charlie is  $\{0, 1\}$  then the state of Bob's qubits 2 and 5, up to a global phase factor, is projected onto:

$$|S^{(2)}\rangle = \sum_{a,b=0}^1 (-1)^{ia \oplus kb} \alpha_{ab} |j \oplus a + 1, l \oplus b\rangle_{25}. \quad (16)$$

If result measurement of Charlie is  $\{1, 0\}$  then the state of Bob's qubits 2 and 5, up to a global phase factor, is projected onto:

$$|S^{(3)}\rangle = \sum_{a,b=0}^1 (-1)^{ia \oplus kb \oplus j \oplus a} \alpha_{ab} |j \oplus a + 1, l \oplus b\rangle_{25}. \quad (17)$$

If result measurement of Charlie is  $\{1, 1\}$  then the state of Bob's qubits 2 and 5, up to a global phase factor, is projected onto:

$$|S^{(4)}\rangle = \sum_{a,b=0}^1 (-1)^{ia \oplus kb \oplus j \oplus a} \alpha_{ab} |j \oplus a, l \oplus b\rangle_{25}. \quad (18)$$

If both Alice and Charlie communicate with Bob via reliable classical channels about their measurement outcomes, then Bob is able to transform  $|S^{(i)}\rangle, i=1,2,3,4$  to Alice's original state, Eqs. (15)-(18), by performing on qubits 2 and 5 single-qubit unitary operations  $U_{ijk/s_1 s_2}$  which are determined by:

$$U_{ijk/s_1 s_2} = (X^{j \oplus s_1 \oplus s_2} Z^{i \oplus s_1})_2 \otimes (X^l Z^k)_5. \quad (19)$$

with  $X, Z$  the Pauli operators.

Because Bob always obtain the original state by using these recovery operators, so the protocol is perfect as both its fidelity and total success probability are equal to one.

### 3. CONTROLLER'S POWER

The controller's power is embodied in how much information Bob can achieve without the controller's help. If Charlie do not disclose his measurement results, Bob's state is a mixed one  $\rho_B$  even with Alice's result. The density matrix can be computed by:

$$\rho_B = \text{Tr}_{33'}(|\psi\rangle_{2533'}\langle\psi|), \quad (20)$$

where  $|\psi\rangle_{2533'}$  is the state of Charlie and Bob's qubits after Alice's measurement, this state is forming:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{2533'} = & x(\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle)_{25}|00\rangle_{33'} \\ & + y(\alpha_{00}|10\rangle + \alpha_{01}|11\rangle + \alpha_{10}|00\rangle + \alpha_{11}|01\rangle)_{25}|01\rangle_{33'} \\ & + z(\alpha_{00}|10\rangle + \alpha_{01}|11\rangle - \alpha_{10}|00\rangle - \alpha_{11}|01\rangle)_{25}|10\rangle_{33'} \\ & + t(\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle - \alpha_{10}|10\rangle - \alpha_{11}|11\rangle)_{25}|11\rangle_{33'}. \end{aligned} \quad (21)$$

The non-conditioned fidelity (NCF) of Bob's state without Charlie's help is:

$$f = {}_{AB}\langle S|\rho_B|S\rangle_{AB}. \quad (22)$$

In order to calculate the average over all input states which are assumed appear equally often, the parameters are rewrite following:

$$\begin{aligned} \alpha_{00} &= \cos\theta_3, \quad \alpha_{01} = \sin\theta_3 \cos\theta_2 e^{i\varphi_3}, \\ \alpha_{10} &= \sin\theta_3 \sin\theta_2 \cos\theta_1 e^{i\varphi_2}, \quad \alpha_{11} = \sin\theta_3 \sin\theta_2 \sin\theta_1 e^{i\varphi_1}, \end{aligned} \quad (23)$$

where  $\theta_k \in [0, \pi/2]$ , and  $\varphi_k \in [0, 2\pi)$  for  $k = 1, 2, 3$ .

Then the average fidelity can be computed by [16]:

$$f_{av} = \frac{1}{V^{(4)}} \prod_{k=1}^3 \int_0^{\pi/2} \cos\theta_k (\sin\theta_k)^{2k-1} d\theta_k \prod_{k=1}^3 \int_0^{2\pi} d\varphi_k f, \quad (24)$$

with total volume of the manifold of pure states is:

$$V^{(4)} = \prod_{k=1}^3 \int_0^{\pi/2} \cos\theta_k (\sin\theta_k)^{2k-1} d\theta_k \prod_{k=1}^3 \int_0^{2\pi} d\varphi_k = \frac{\pi^3}{3!} \quad (25)$$

and we get:

$$f_{av} = \frac{1}{5}(5x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}x^2. \quad (26)$$

The average controller's power is:

$$C_{av} = 1 - f_{av} = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}x^2. \quad (27)$$

For N-qubit state, the minimal fidelity is  $1/2^N$  by guessing and the classical limit is [15]

$$F_{cl} = \frac{2}{1+2^N}. \quad (28)$$

when  $N = 2$ , then  $F_{cl} = 2/5$  and  $(f_{av})_{min} = 1/4$ . This means that, for perfect controlled teleportation of two-qubit state, the average controller's power should be  $3/5 \leq C_{av} \leq 3/4$ , therefore the parameters of quantum channel are chosen  $1/4 \leq x \leq 1/2$ . Without controller's collaboration, the quantum average fidelity is smaller than the classical fidelity when the parameters of quantum channel satisfy the following conditions

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, \\ 1/4 \leq x \leq 1/2. \end{cases} \quad (29)$$

#### 4. CONCLUSION

We have proposed the protocol for controlled teleporting an arbitrary two-qubit state. In this protocol, as the quantum channel, an EPR pair and a  $|Q\rangle_{123'}$  state are shared by the sender, the controller, and the receiver. The protocol is perfect as both its fidelity and total success probability are equal to one. Without controller's collaboration, the quantum average fidelity is smaller than the classical fidelity, therefore the power of controller is guaranteed. The study controlled quantum teleportation of a two-qubit state via a set of partially entangled quantum channels subjected to noises would be proceeded.

#### REFERENCES

1. C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters (1993), "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels", *Phys. Rev. Lett.* **70**, p.1895.
2. M. A. Nielsen, I. L. Chuang (2000), "Quantum Computation and Quantum Information", *Cambridge University Press*, Cambridge.
3. D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Martle, M. Eibl, H. Weinfurter and A. Zeilinger (1997), "Experimental quantum teleportation", *Nature* **390**, p.575.
4. B.-S Shi, A. Tomita (2002), "Teleportation of an unknown state by W state", *Phys. Lett. A* **296** p.161.
5. Y. Yeo and W. K. Chua (2006), "Teleportation and Dense Coding with Genuine Multipartite Entanglement", *Phys. Rev. Lett.* **96** p.060502.
6. J. -M. Liu and G. -C. Guo (2002), "Quantum Teleportation of a Three-Particle Entangled State", *Chin. Phys. Lett.* **19** p.456.
7. C. Min, Z. S.-Qun and F. J.-Xing (2004), "Teleportation of n-Particle State via n Pairs of EPR Channels", *Commun. Theor. Phys.* **41** p.689.

8. Y.-B. Zhan, (2004), “Teleportation of N-particle entangled W state via entanglement swapping”, *Chin. Phys.* **13** p.1801.
9. P.-X. Chen, S.-Y. Zhu, and G.-C. Guo (2006), “General form of genuine multipartite entanglement quantum channels for teleportation”, *Phys. Rev. A* **74** p.032324.
10. A. Karlsson and M. Bourennane (1998), “Quantum teleportation using three-particle entanglement”, *Phys. Rev. A* **58** p.4394.
11. C. P. Yang, S. I. Chu, S. Han (2000), “Efficient many-party controlled teleportation of multiqubit quantum information via entanglement”, *Phys. Rev. A* **70** p.022329.
12. A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen (1935), “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, *Phys. Rev. A* **62** p.777.
13. D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Zeilinger (1989), in: “Bell’s Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe”, M. Kafatos (Ed.), Kluwer, Dordrecht, p.69.
14. W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac (2000), “Three qubits can be entangled in two inequivalent ways”, *Phys. Rev. A* **62** p.062314.
15. X. H. Li, S. Ghose (2015), “Analysis of N-qubit perfect controlled teleportation schemes from the controller’s point of view”, *Phys. Rev. A* **91** p.012320.
16. K. Zyczkowski and H.-J. Sommers (2001), “Induced measures in the space of mixed quantum states”, *J. Phys. A* **34** p.7111.

## VIỄN CHUYỂN LƯỢNG TỬ CÓ ĐIỀU KHIỂN QUA KÊNH LƯỢNG TỬ RIÊNG PHẦN RỜI KHÔNG CỰC ĐẠI: TẮT ĐỊNH VÀ QUYỀN LỰC CỦA NGƯỜI ĐIỀU KHIỂN

**Tóm tắt:** Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu viễn chuyển lượng tử trạng thái của hai qubit bất kì có điều khiển qua kênh lượng tử riêng phần rời không cực đại. Bằng chiến lược hợp lý, khi người điều khiển hợp tác, giao thức viễn chuyển là hoàn hảo vì xác suất thành công và độ tin cậy bằng một. Mặt khác, các tham số đặc trưng của kênh lượng tử riêng phần rời không cực đại được thiết kế sao cho khi người điều khiển không hợp tác thì quyền lực của anh ta được bảo đảm nghĩa là độ tin cậy của trạng thái nhận được trong trường hợp này nhỏ hơn độ tin cậy cổ điển.

**Từ khóa:** Viễn chuyển lượng tử, trạng thái của hai qubit bất kì, kênh lượng tử riêng phần rời không cực đại, quyền lực của người điều khiển

# MỘT PHƯƠNG PHÁP ĐẶC TẢ LOGIC CHO VIỆC ĐÁNH GIÁ VÀ PHÂN TÍCH LỖ HỔNG AN NINH MẠNG

Trần Bá Hùng<sup>1</sup>, Nguyễn Đức Giang<sup>1</sup>, Bùi Thị Thu<sup>1</sup>, Lưu Thị Bích Hương<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Viện Công nghệ Thông tin, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

<sup>2</sup>Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2

**Tóm tắt:** Điều quan trọng đối với các quản trị viên hệ thống là phải biết về những lỗ hổng bảo mật. Tuy nhiên, các phương pháp đánh giá tính dễ tổn thương hiện tại có thể gặp phải các vấn đề về tỷ lệ sai lệch cao, thời gian tính toán dài. Hơn nữa, chúng chỉ có khả năng định vị các lỗ hổng riêng lẻ trên một máy chủ lưu trữ mà không cần quan tâm đến hiệu quả tương ứng của các lỗ hổng trên máy chủ hoặc một phần của mạng với các lỗ hổng có thể được phân phối giữa các máy khác nhau. Để giải quyết những vấn đề này, chúng tôi đưa ra một phương pháp hình thức sử dụng đặc tả logic cho việc đánh giá và phân tích lỗ hổng an ninh mạng. Với phương pháp này các lỗ hổng được phát hiện mà không cần phải mô phỏng các cuộc tấn công và nó cũng có thể dễ dàng tích hợp với các công cụ bảo mật khác dựa trên cơ sở dữ liệu quan hệ.

**Từ khóa:** An ninh mạng, đánh giá tính dễ tổn thương, lỗ hổng bảo mật, thuộc tính logic

Nhận bài ngày 14.5.2017; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 10.9.2017

Liên hệ tác giả: Trần Bá Hùng; Email: tbhung@ioit.ac.vn

## 1. GIỚI THIỆU

Ngày nay, với sự gia tăng mạnh mẽ của mạng máy tính và sự phức tạp của phần mềm máy tính, các lỗ hổng bảo mật cũng tăng nhanh ở các doanh nghiệp lớn [3]. Vì nhiều vấn đề về bảo mật gây ra bởi các lỗ hổng ẩn trong các mạng máy tính, điều cực kỳ quan trọng là các quản trị viên hệ thống phải biết về các lỗ hổng này. Phân tích những lỗ hổng này và tìm ra cách khai thác, khắc phục chúng là rất quan trọng cho các hệ thống thông tin của tổ chức, doanh nghiệp [9], có nhiều nghiên cứu để phát triển kỹ thuật đánh giá tính dễ tổn thương như xác định các lỗ hổng bảo mật hiện có trong mạng. Trong thực tế, cùng với tường lửa, hệ thống phát hiện xâm nhập, mã hóa và bảo vệ chống virus, đánh giá tổn thương là một trong những kỹ thuật cốt lõi trong việc bảo vệ chống lại các cuộc tấn công mạng. Các phương pháp phân tích lỗ hổng bảo mật được thực hiện tự động, chẳng hạn như Internet Security System (ISS) Internet Scanner, Nessus, andsoon [15]. Trong bài báo này

chúng tôi sẽ giới thiệu một phương pháp mới để phân tích đánh giá lỗ hổng an ninh mạng đó là phương pháp hình thức sử dụng đặc tả logic để giải quyết bài toán lỗ hổng an ninh mạng.

Để giải quyết vấn đề này bài báo trình bày một hệ thống đánh giá tính dễ bị tổn thương cho mô hình mạng NetScope dựa trên ngôn ngữ OVAL (Open Vulnerability Assessment Language), bao gồm ba module chính: kiểm tra phân chia các tác nhân (distributed inspection agents), phương pháp phân tích (analysis engine) và trung tâm dữ liệu (data center). Các lỗ hổng được xác định thông qua OVAL đồng thời kết hợp các lỗ hổng tương ứng với các cuộc tấn công trong một mạng thông qua lí thuyết logic vị từ.

Trong các phần tiếp theo của bài báo chúng tôi trình bày phương pháp đặc tả logic cho việc đánh giá và phân tích lỗ hổng an ninh mạng. Phần ba của bài báo là kết quả thử nghiệm phương pháp hình thức sử dụng đặc tả. Cuối cùng là kết luận của bài báo.

## 2. PHƯƠNG PHÁP ĐẶC TẢ LOGIC CHO VIỆC ĐÁNH GIÁ VÀ PHÂN TÍCH LỖ HỔNG AN NINH MẠNG

### 2.1. Mô hình hệ thống lỗ hổng NetScope

#### 2.1.1. Một số khái niệm cơ bản

Phương pháp phân tích của hệ thống NetScope được đề xuất trong bài báo này dựa trên lý thuyết logic vị từ đơn giản được phân chia thành hai phần: phần riêng biệt và vị từ. Các vị từ có các yếu tố cơ bản, trước tiên chúng ta giới thiệu các định nghĩa sau được sử dụng cho NetScope [7].

*Định nghĩa 1.* [19] Kiểu tấn công  $V$ : gồm ba thành phần (*fact*, *prerequisite*, *consequence*) để đại diện cho điều kiện tiên quyết và kết quả của mỗi kiểu tấn công. Mô tả của mỗi phần tử được liệt kê như sau:

– *Fact*: là một tập hợp các cá thể, mỗi cá thể có miền liên kết các giá trị, được ký hiệu bởi  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

– *Prerequisite*: Là điều kiện tiên quyết chỉ ra những cái gì cần phải đúng để thực hiện tấn công một cách thành công được thể hiện bằng công thức vị từ như sau:  $P_1(x_1) \wedge \dots \wedge P_p(x_p)$ .

– *Consequence*: Mô tả những gì có thể đúng nếu cuộc tấn công thực sự thành công, là một tập hợp các công thức cơ sở logic, tất cả các biến được biểu diễn bởi công thức  $\{P_1(x_1), \dots, P_q(x_q)\}$ .

*Định nghĩa 2.* Một tấn công tức thời  $v$ : là tập hữu hạn của tập hợp trên *fact* của kiểu tấn công  $V$ , trong đó mỗi bộ được kết hợp với một giá trị xác định.

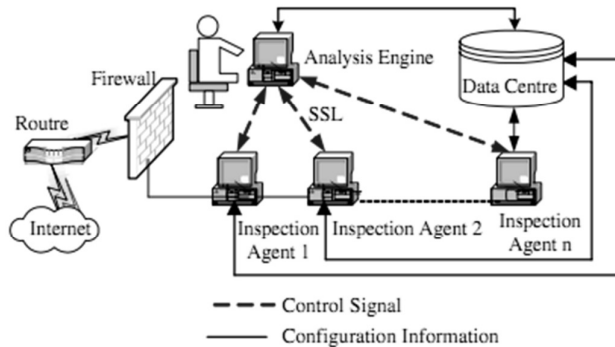
*Định nghĩa 3.* [20] Kiểu lỗ hổng  $D$ : của bất kỳ thuộc tính hệ thống nào có thể được sử dụng như là một điều kiện tiên quyết của các kiểu tấn công, tức là mỗi công thức thuộc tính cơ sở là điều kiện tiên quyết cho các kiểu tấn công được biết đến trong CVE (Common Vulnerabilities and Exposures), quyền đầy đủ của người dùng trên victim/attack host và các kịch bản tấn công để khởi động các cuộc tấn công.

*Định nghĩa 4.* Lỗ hổng khởi tạo  $d$ : là một lỗ hổng cụ thể với các địa chỉ IP xác định tương ứng với một kiểu dễ bị tấn công  $D$ .

*Định nghĩa 5.* Quan hệ tấn công/lỗ hổng là một cuộc tấn công tương ứng  $v$  tương quan với lỗ hổng được tạo ra  $d$  nếu có tồn tại  $p \in P(v)$  sao cho  $d$  bao hàm  $p$ , trong đó  $P(v)$  là tập hợp của tất cả các vị từ xuất hiện trong điều kiện tiên quyết và có đối số được thay thế bằng các giá trị thuộc tính tương ứng của một bộ trong  $d$ .

### 2.1.2. Kiến trúc của hệ thống mô tả lỗ hổng NetScope

Kiến trúc tổng thể của NetScope đề xuất trong bài báo này được thể hiện trong *Hình 1*. Nó bao gồm ba phần: tác nhân kiểm tra (inspection agents), trung tâm dữ liệu (data center) và công cụ phân tích (analysis engine). Các chức năng của từng phần được mô tả như sau:



**Hình 1.** Kiến trúc của hệ thống mô tả lỗ hổng NetScope.

– *Inspection agent*: Mỗi một inspection agent được triển khai trên một máy chủ đích có trách nhiệm thu thập thông tin cấu hình hệ thống thông qua OVAL và báo cáo cho trung tâm dữ liệu để phân tích. Với khả năng thu thập thông tin mạnh mẽ, hệ thống NetScope có lợi thế là xây dựng hồ sơ lưu trữ bao gồm: kiểu và phiên bản hệ điều hành, danh sách các dịch vụ, phần mềm và danh sách vá, chính sách kiểm soát truy cập, sử dụng băng thông, hiệu năng I/O...vv.



– *Analysis engine*:

- *Cấu hình hệ thống đánh giá*: Thiết lập mục tiêu các máy chủ, cơ sở dữ liệu, chính sách đánh giá và điều kiện đánh giá theo yêu cầu đánh giá, trong đó việc thiết lập chính sách đánh giá là lựa chọn một số phiên bản nhất định của phần mềm đánh giá. Điều kiện đánh giá có thể là một trong ba mục tiêu: đánh giá định kỳ, đánh giá định hướng thông tin và đánh giá theo sự kiện.

- *Xác định các lỗ hổng*: Theo các định nghĩa của OVAL, xác định xem có tồn tại các lỗ hổng trên máy chủ hay không dựa trên thông tin cấu hình được cung cấp bởi mỗi tác nhân kiểm tra.

- *Phân tích lỗ hổng mạng*: Tương quan các lỗ hổng cá nhân được phát hiện với các cuộc tấn công đã biết để xây dựng các đường dẫn tấn công tiềm năng dẫn đến mục tiêu được bảo vệ.

- *Kiểm soát các tác nhân kiểm tra*: Kiểm soát việc khởi động và chấm dứt các tác nhân kiểm tra.

- *Hiển thị các kết quả đánh giá*: Báo cáo đã phát hiện các lỗ hổng bảo mật, các đường dẫn tấn công tiềm ẩn và các thông tin chi tiết tương ứng.

- *Quản lý cơ sở dữ liệu*: Duyệt, chèn và xóa các bản ghi dữ liệu.

– *Data center*: Lưu trữ kiến thức về tấn công/lỗ hổng, thông tin cấu hình hệ thống từ mọi nhân viên kiểm tra, và các kết quả đánh giá được tạo ra bởi công cụ phân tích. Trong bài báo này chúng tôi đề cập tới ICAT Metabase [22] để xác định định dạng hình thức của cơ sở dữ liệu *Vul\_Base* (cơ sở dữ liệu về lỗ hổng) được thể hiện trong *Bảng 1*.

**Bảng 1.** Định dạng và mô tả cơ sở dữ liệu để bị tổn thương *Vul\_Base*

Field	Description	Field	Description
<i>Vul_Name</i>	CVE ID	<i>Pub_Date</i>	Published date of vulnerability
<i>Sum</i>	Summary description of vulnerability	<i>Th_Sev</i>	Threat degree: high, medium or low
<i>Ex_Range</i>	Attack range: remote or local	<i>Ref</i>	Related websites containing vulnerability information
<i>Loss_Type</i>	Loss type	<i>Vul_Type</i>	Vulnerability type
<i>Vul_SofAVer</i>	Vulnerable software and its version	<i>Rem_Measure</i>	Remedy solutions

### 2.1.3. Nguyên tắc mô tả lỗ hổng

Trong bài báo này, hệ thống NetScope dựa vào một tiêu chuẩn mới OVAL để xác định liệu lỗ hổng có tồn tại trên một hệ thống nhất định hay không. Lược đồ chuẩn này cung cấp một đường cơ sở để thực hiện kiểm tra tính dễ bị tổn thương trên hệ thống máy tính nội bộ [21]. Đề cập đến tóm tắt định nghĩa OVAL, một mô hình đánh giá tổn thương dựa trên

mức độ gia tăng được trình bày ở Hình 2 đặc tả mô hình đánh giá lỗ hổng trên nền tảng Windows.

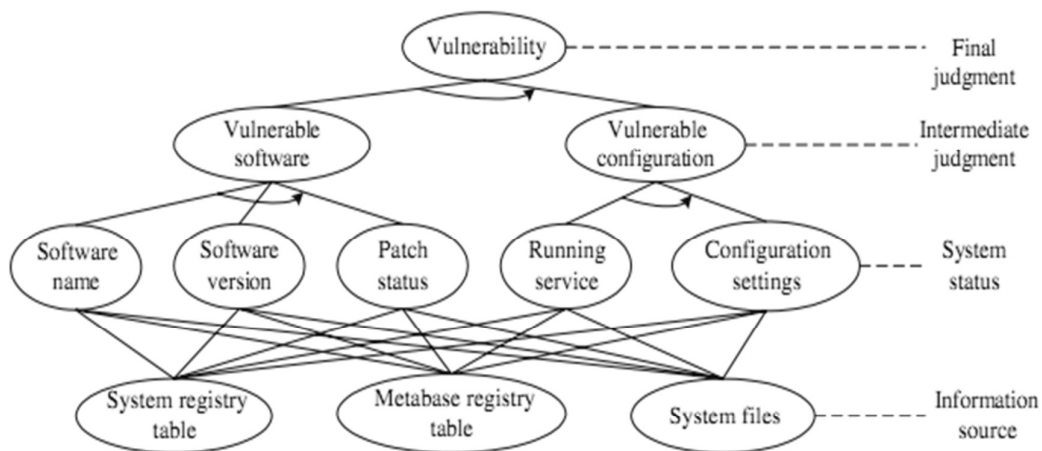
Mô hình này bao gồm bốn lớp từ dưới lên trên: nguồn thông tin, tình trạng hệ thống, đánh giá trung và đánh giá cuối cùng. Đầu tiên có được cấu hình hệ thống: bảng đăng ký hệ thống, bảng đăng ký Metabase, hoặc tệp hệ thống. Sau đó, xác định trung gian tức là liệu một phần mềm hoặc cấu hình nhất định có bị tổn thương hay không, được thực hiện dựa trên thông tin trạng thái hệ thống. Kết luận cuối cùng lỗ hổng cho một máy chủ lưu trữ được thực hiện bởi logic AND-operation dựa trên đánh giá kết quả trung gian. Quá trình xác định hình thức được đưa ra như sau:

*Trước tiên*, năm tập hợp được định nghĩa đó là: tập các phần mềm ứng dụng  $FN = \{fn_1, \dots, fn_n\}$ , tập phiên bản phần mềm ứng dụng  $AV = \{av_1, \dots, av_n\}$  tập các bản vá lỗi  $PS = \{ps_1, \dots, ps_m\}$  tập các dịch vụ đang chạy  $RS = \{rs_1, \dots, rs_v\}$  và một tập hợp các thiết lập cấu hình  $CS = \{cs_1, \dots, cs_u\}$ . Mỗi phần tử trong năm bộ này được biểu diễn dưới dạng công thức vị từ  $Exist(x)$  có nghĩa là tồn tại  $x$  trên một số máy chủ hoặc sự suy luận hợp lý của nó. Và miền giá trị của mỗi phần tử là  $\{0, 1, \varphi\}$ , trong đó 1 và 0 đại diện cho vị từ của thông tin hệ thống, một lỗ hổng cụ thể phụ thuộc vào đúng hay sai. Giá trị  $\varphi$  biểu thị rằng một lỗ hổng cụ thể hiện diện trên máy chủ không dựa trên vị từ này.

*Thứ hai*, chức năng đánh giá của phần mềm dễ bị tổn thương liên quan đến một lỗ hổng nhất định được định nghĩa như sau:

$$g(fn, av, ps) = \begin{cases} 1, & fn \neq 0 \text{ and } av \neq 0 \text{ and } ps \neq 1 \\ 0, & fn = 0 \text{ or } av = 0 \text{ or } ps = 1 \end{cases}$$

Trong đó:  $fn \in FN, av \in AV, ps \in PS$  (1)



Hình 2. Mô hình đánh giá lỗ hổng dựa trên cấp độ gia tăng cho nền tảng Windows.

Thứ ba, đối với một lỗ hổng nhất định, chức năng đánh giá cấu hình dễ bị tổn thương được định nghĩa là:

$$h(rs, cs) = \begin{cases} 1, rs \neq 0 \text{ and } cs \neq 0 \\ 0, rs = 0 \text{ or } cs = 0 \end{cases}$$

Trong đó:  $rs \in RS, cs \in CS$  (2)

Cuối cùng, chức năng đánh giá liệu một lỗ hổng nhất định có tồn tại trên máy chủ được định nghĩa là:

$$f(g, h) = g(fn, av, ps) \wedge h(rs, cs) \quad (3)$$

Ví dụ như lỗ hổng CAN-2002-0863, tức là, khả năng mã hóa yếu kém trong giao thức RDP, các công thức định vị liên quan đến Eqs. Từ (1), (2) và (3) được chỉ ra như sau:

$fn = \text{Exist}(\text{Terminal Server } 5:0)$ ,

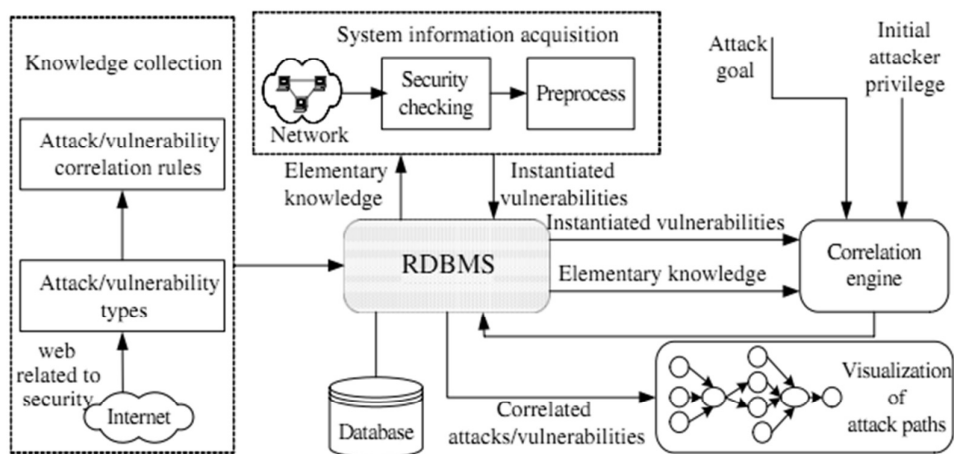
$ps = \text{Exist}(\text{Patch Q324380}) \cap \text{Exist}(\text{SP} > 4)$ ,

$rs = \text{Exist}(\text{RDP service}), cs = \varnothing$

$av = \text{Exist}(\text{rdpwd:sys versions} \leq 5:0:2195:5880)$ .

Ngôn ngữ SQL được đưa ra trong Mitre Corporation 2006 để xác định xem lỗ hổng CAN-2002-0863 có trên máy chủ hay không.

## 2.2. Mô hình phân tích đánh giá lỗ hổng mạng



Hình 3. Mô hình phân tích đánh giá lỗ hổng mạng.

Dựa trên các lỗ hổng được phát hiện, làm thế nào để chỉ ra mối quan hệ giữa các lỗ hổng đơn lẻ với nhau mà nó có thể kết hợp được tạo thành một cuộc tấn công liên quan đến

cấu hình ban đầu. Một phương pháp mới về phân tích mối tương quan attack/vulnerability dựa trên logic vị từ được đề xuất để xây dựng các đường tấn công tiềm năng dẫn đến mục tiêu cụ thể. Hình 3 cho ta mô hình lỗ hổng mạng được phân tích.

Ý tưởng thiết yếu của cách tiếp cận được đề xuất là tương quan các lỗ hổng và các cuộc tấn công bằng cách kết hợp các lỗ hổng cơ bản với các điều kiện tiên quyết của các cuộc tấn công khởi tạo. Nó sử dụng đầy đủ mối quan hệ nhân quả giữa các cuộc tấn công và các lỗ hổng, tức là các điều kiện tiên quyết của một cuộc tấn công phải được đáp ứng trước khi nó có thể được sử dụng và hậu quả của một cuộc tấn công thành công có thể bao gồm việc khám phá những thông tin có giá trị về mạng, nâng cao quyền của người dùng, thêm các mối quan hệ tin cậy giữa các hiệu ứng có thể khác. Có bốn module: thu thập kiến thức, thu thập thông tin hệ thống, công cụ tương quan và trực quan hóa các đường dẫn tấn công trong mô hình phân tích lỗ hổng mạng. Bốn module này tương tác với RDBMS để xây dựng các đường dẫn tấn công có thể dẫn đến một mục tiêu được bảo vệ.

#### **Module1: Thu thập kiến thức cơ bản**

Mục đích của việc thu thập kiến thức cơ bản là xây dựng một cơ sở tri thức cho mối tương quan giữa attack/vulnerability. Tuy nhiên, rất khó để tự động nắm bắt ngữ nghĩa cần thiết cho các điều kiện tiên quyết và hậu quả của cuộc tấn công, ngôn ngữ thường được sử dụng để mô tả các lỗ hổng và cách khai thác chúng. Bài báo này sẽ thu thập thông tin về các lỗ hổng và kỹ thuật tấn công được biết đến từ cơ sở dữ liệu (Sourcefire 2003) để xây dựng cơ sở dữ liệu attack/vulnerability ban đầu. Từ cơ sở dữ liệu tấn attack/vulnerability này, chúng tôi xây dựng một nguyên tắc điều kiện tiên quyết hay hậu quả (prerequisite/consequence) cơ sở của các cuộc tấn công bằng tay, nơi các điều kiện tiên quyết và hậu quả của các cuộc tấn công được mô tả bởi các công thức tính cơ sở của các lỗ hổng. Xây dựng cơ sở tri thức này liên quan đến việc mô hình hoá các lỗ hổng của hệ thống, các cuộc tấn công cơ bản và mối quan hệ giữa các cuộc tấn công và các lỗ hổng.

#### *Mô hình lỗ hổng (Modeling vulnerabilities)*

Lỗ hổng này được định nghĩa là bất kỳ thuộc tính hệ thống nào có thể được sử dụng như một điều kiện tiên quyết cho một cuộc tấn công. Theo định nghĩa về tính dễ bị tổn thương, nó có thể được chia thành sáu thành phần: CVE và các quyền của người dùng trên máy chủ nạn nhân, quyền người dùng, khả năng thực thi các chương trình và các kịch bản tấn công trên máy chủ tấn công và các chính sách truy cập. Thông qua các công thức tính cơ sở, sáu phần này được mô hình như sau:

Vul\_Name(VICTIM) (Predicate 1)

User\_Name(ATTACK) (Predicate 2)

User_Name(VICTIM)	(Predicate 3)
Policy Name(ATTACK; VICTIM)	(Predicate 4)
EXECUTE(ATTACK)	(Predicate 5)
PGM Name(ATTACK)	(Predicate 6)

Trong đó: Predicate 1 *Vul\_Name (VICTIM)* là tên của host dễ bị tổn thương *VICTIM*. *User\_Name* ở Predicate 2 và Predicate 3 xác định một tập hợp các hành động được cho phép trên một host được chỉ định có thể ở một trong ba cấp: không có đặc quyền NONE, người dùng bình thường *NORMAL\_USER* và quyền siêu người dùng *SUP\_USER*. Trong Predicate 4, *Policy\_Name* được đặt tên theo cách tiếp cận lớp theo cấu trúc giao thức mạng TCP/IP, chẳng hạn như *LINK\_ARP*, *TRANS\_TELNET*, như vậy, cho phép người dùng trên máy *ATTACK* có thể truy cập vào dịch vụ *NAME* của máy chủ *VICTIM* tại lớp *Policy*. Predicate 5 và Predicate 6 nghĩa là kẻ tấn công có thể thực hiện bất kỳ chương trình và phần mềm *PGM\_Name* của riêng mình trên máy *ATTACK*.

#### Mô hình tấn công (Modeling attacks)

Cơ sở dữ liệu chữ ký Snort được phục vụ dưới dạng cơ sở dữ liệu tấn công trong hệ thống NetScope được đề xuất trong bài báo này là một cuộc tấn công cơ bản được định nghĩa hình thức như sau:

Exploit Name (ATTAC; Mid Host, VICTIM) (Predicate 7)

Cụ thể, kẻ tấn công trên host *ATTACK* có thể khởi chạy tấn công *Exploit\_Name* gây bất lợi cho máy chủ *VICTIM* thông qua máy *Mid\_Host*.

Mô hình hoá mối quan hệ nhân quả giữa các cuộc tấn công và các lỗ hổng

Cần phải tính đến mối quan hệ nhân quả giữa các cuộc tấn công và các lỗ hổng để phát hiện các đường dẫn tấn công tiềm tàng dẫn đến một mục tiêu. Mối quan hệ nhân quả giữa các cuộc tấn công và các lỗ hổng được mô hình như sau:

$prerequisite_1 \wedge \dots \wedge prerequisite_n \Rightarrow exploit$  (Predicate 8)

$exploit \Rightarrow \{ consequence_1 \dots consequence_m \}$  (Predicate 9)

Trong hai vị từ trên điều kiện tiên quyết và hậu quả được thể hiện bằng công thức cơ bản. Điều đó có nghĩa *prerequisite<sub>i</sub> (i=1,...,n)* phải đúng để có thể thực hiện thành công cuộc tấn công, và nếu sự khai thác thành công thì *consequence<sub>j</sub> (j=1,...,m)* có thể đúng. Một số bảng trong cơ sở dữ liệu quan hệ được sử dụng để lưu trữ các vị từ trong cơ sở tri thức, bao gồm các thuộc tính liên quan đến các tấn công và các lỗ hổng, và mối quan hệ giữa chúng. Hình 4 cho thấy một số bảng cho một cơ sở tri thức ví dụ.

PID	VulPredicate	ArgNum	ArgPos	ArgName
1	TRANS_IIS_RDS	2	1	ATTACK
1	TRANS_IIS_RDS	2	2	VICTIM
2	EXECUTE	1	1	ATTACK
3	SERVICE_FTP	1	1	VICTIM
4	TRANS_FTP	2	1	ATTACK
4	TRANS_FTP	2	2	VICTIM
5	EXECTUE	1	1	VICTIM
6	CVE-2002-1142	1	1	VICTIM
7	SUP_USER	1	1	VICTIM
8	PGM_WUFTDX	1	1	ATTACK
9	SERVICE_IIS	1	1	VICTIM
10	CVE-1999-0879	1	1	VICTIM

(a) Table Vulnerability Type Predicate

AttackType	PreNum	PrePos	PID
WUFTPDX	5	1	3
WUFTPDX	5	2	4
WUFTPDX	5	3	2
WUFTPDX	5	4	8
WUFTPDX	5	5	10

(d) Table Attack Type Prerequisite

AttackType	AttrNum	AttrPos	AttrName
WUFTPDX	2	1	ATTACK
WUFTPDX	2	2	VICTIM
IIS_RDS	2	1	ATTACK
IIS_RDS	2	2	VICTIM

(b) Table Attack Type Fact

AttackType	ConNum	ConPos	PID
WUFTPDX	1	1	5
IIS_RDS	2	1	5
IIS_RDS	2	2	7

(c) Table Attack Type Consequence

VulName	PID
FTP service enabled	3
WUFTPDX is installed	8
CVE-2002-1142	6
Permitting incoming FTP traffic	4

(e) Table VulName to PID

**Hình 4.** Bảng ví dụ cho các vị từ và các kiểu attack/vulnerability trong cơ sở tri thức.

Ở các bảng trên thì: *PID* là số thứ tự của các vị từ, *VulPredicate* là tên của vị từ biểu diễn cho một kiểu của tính dễ bị tổn thương, *ArgNum* là số lượng cá nhân trong các thành phần thực tế của mỗi vị từ kiểu dễ bị tổn thương, *ArgPos* là vị trí cá nhân trong thành phần thực tế của mỗi vị từ của kiểu dễ bị tổn thương, *ArgName* tên cá nhân tương ứng với vị trí cá nhân trong thành phần thực tế của mỗi vị từ của kiểu dễ bị tổn thương, *AttackType* là kiểu tấn công *V* đại diện cho một kiểu tấn công, *AttrNum* số thuộc tính trong thành phần thực tế của mỗi vị từ của kiểu tấn công, *AttrPos* là vị trí thuộc tính trong thành phần thực tế của mỗi vị từ của kiểu tấn công, *AttrName* là tên thuộc tính tương ứng vị trí tạo độ trong thành phần thực tế của mỗi vị từ của kiểu tấn công, *PreNum/ConNum* là số lượng các yếu tố trong thành phần prerequisite/consequence của mỗi vị từ của kiểu tấn công, *PrePos/ConPos* là vị trí phần tử trong thành phần prerequisite/consequence của mỗi vị từ của kiểu tấn công.

Bảng kiểu vị từ lỗ hổng (*Hình 4a*) bao gồm các vị từ có thể được sử dụng để biểu diễn cho điều kiện tiên quyết và hậu quả của các cuộc tấn công. Ví dụ, đầu tiên và thứ hai của các bộ trong hình 4a cho biết TRANS\_IIS\_RDS là một vị từ có hai cá thể: ATTACK đầu tiên và VICTIM thứ hai, số thứ tự của nó là 1. Các kiểu tấn công được lưu trữ trong ba bảng: Attack Type Fact (*Hình 4b*), Attack Type Prerequisite (*Hình 4d*) và kết quả loại tấn công (*Hình 4c*). Hai bảng: Kiểu tấn công điều kiện tiên quyết và kiểu tấn công kết quả có

cùng cấu trúc, nhưng được sử dụng để giữ các điều kiện tiên quyết và hậu quả của các kiểu tấn công đã biết, tương ứng. Ví dụ, bộ đầu tiên của *Hình 4c* nói lên kiểu tấn công WUFTPD có một vị từ có PID là 5, tức là EXECUTE trong thành phần kết quả của nó. Ngoài ra, bảng VulName tới PID (xem *Hình 4e*) bao gồm VulName và PID được thiết kế để tự động đạt được sự chuyển đổi từ các lỗ hổng đã được phát hiện thành các vị từ cơ bản và đặt nền móng cho quá trình tiền xử lý sau này.

### Module2: Thu thập thông tin hệ thống

Thông tin về cấu hình hệ thống rất hữu ích cho việc xây dựng các đường tấn công tiềm ẩn. Ví dụ, các chính sách truy cập giúp xác định xem một kẻ tấn công có thể gửi một gói độc hại đến một chương trình dễ bị tổn thương. Chức năng của module thu thập thông tin hệ thống là khám phá topo mạng và mô tả nó theo một định dạng nhất định. Đối với NetScope là thực tế, điều quan trọng là tự động hoá quá trình phát hiện mạng.

Hai kiểu tác nhân kiểm tra được phát triển cho nền tảng Windows và Linux để vượt qua vấn đề của hệ thống đánh giá hiện tại không có khả năng cung cấp chính sách truy cập và thông tin cấu hình khác. Các tác nhân kiểm tra đề xuất sử dụng OVAL, và tự động xuất ra thông tin cấu hình máy chi tiết bao gồm các dịch vụ hữu ích, các thành phần phần mềm, kết nối mạng và các cổng I/O. Đối với máy chủ Windows hoặc Linux, các tác nhân kiểm tra có được các chính sách truy cập bằng cách phân tích cú pháp các giá trị chính của các quy tắc tường lửa trong bảng đăng ký và các tệp cấu hình của **IPTables** hoặc **IPChains** tương ứng. Hơn nữa, công cụ phân tích NetScope phân tích thông tin cấu hình từ các tác nhân kiểm tra để phát hiện lỗ hổng CVE trong một hệ thống. Các lỗ hổng CVE được phát hiện và thông tin cấu hình được chuyển thành các lỗ hổng cơ bản dựa theo bảng VulName đến PID được lưu trữ dưới dạng lỗ hổng và hiển thị trong *Bảng 2*.

**Bảng 2.** Tình dễ bị tổn thương

InsVulID	InsVulPredicate	Src_Host	Dst_Host
1	TRANS_IIS_RDS	192.168.1.10	192.168.1.19
2	TRANS_IIS_RDS	192.168.1.50	192.168.1.19
3	EXECUTE	192.168.1.10	NULL
4	SERVICE_FTP	192.168.1.19	NULL

Định nghĩa của mỗi trường trong Bảng 2 được cho theo các cột: **InsVulID** là số thứ tự của lỗ hổng cơ bản, **InsVulPredicate** là các vị của lỗ hổng cơ bản, **Src\_Host/Dst\_Host** là các máy chủ **source/destination** tham gia vào lỗ hổng cơ bản.

### Module 3: Phương pháp tương quan

Phương pháp tương quan là rất quan trọng để xây dựng các đường dẫn tấn công tiềm năng dựa trên lý thuyết logic vị từ. Trong giai đoạn này, kết quả attack/vulnerability và thông tin cấu hình hệ thống cụ thể được gửi đến một công cụ tương quan. Động cơ này tương tác với RDBMS để tương quan các cuộc tấn công với các lỗ hổng được phát hiện bằng cách sử dụng đầy đủ mối quan hệ nhân quả giữa chúng và lưu trữ chúng vào bảng kết quả tương quan **Correlated\_Result** thể hiện trong bảng 3 đang chuẩn bị và đã chuẩn bị. Tại cùng một hàng trong bảng 3, vị từ thuộc trường Preparing là điều kiện tiên quyết của vị từ trong trường Prepared.

**Bảng 3.** *Correlated\_Result*

Preparing	Prepared
<i>TRANS_FTP</i> (192.168.1.10,192.168.1.19)	<i>WUFTPDX</i> (192.168.1.10,192.168.1.19)
<i>EXECUTE</i> (192.168.1.10)	<i>WUFTPDX</i> (192.168.1.10,192.168.1.19)

Trước khi giới thiệu thuật toán tương ứng với các lỗ hổng với các tấn công, trước tiên chúng ta cung cấp các định nghĩa sau cho một số biến, hàm và toán tử được sử dụng trong quá trình tương quan.

$S_{found}$  là tập các cuộc tấn công có thể tìm thấy được.

$S_{current}$  là tập hợp các cuộc tấn công thành công có thể xảy ra trong quá trình lặp lại hiện tại.

$SC_{current}$  là hậu quả của các cuộc tấn công thành công có thể phát hiện được trong quá trình lặp lại hiện tại.

$P_{(et)}/C_{(et)}$  là các điều kiện prerequisites/consequences thiết lập của kiểu tấn công  $e_i$ .

$Sign$  là biến thể hiện đường dẫn tấn công dẫn đến một mục tiêu cụ thể được tìm thấy. Được chỉ định nếu giá trị của dấu hiệu là 1, có nghĩa là có một đường dẫn tấn công ít nhất. Nếu không, không tìm thấy đường tấn công.

$correlation(i, temp)$  là hàm các quy tắc tương quan để xác định liệu một cuộc tấn công instantiated có thể thành công, cho dù các giá trị tương ứng với cùng một ký tự "ATTACK", "Mid\_Host" hay "VICTIM" trong mẫu kiểu bản ghi là hoàn toàn bình đẳng trong bản ghi instantiated  $i$  nếu có, cuộc tấn công này sẽ xảy ra, và giá trị trả về tương quan chức năng là TRUE. Nếu không, sẽ không có cuộc tấn công xảy ra và giá trị trả về là



FALSE. Ví dụ một kiểu tấn công cụ thể IIS\_RDS, giả sử một loại bản ghi và một bản ghi khởi tạo  $i = \{Money, NULL, Money, Maude, Maude, NULL\}$ , một cuộc tấn công kiểu tấn công khởi tạo IIS\_RDS thành công vì các giá trị tương ứng với ATTACK và VICTIM trong  $temp$  là Money và Maude trong  $i$ .

$$temp = \left\{ \underbrace{'ATTACK', 'NULL'}_{1EXECUTE}, \underbrace{'ATTACK', 'VICTIM'}_{2TRANS\_IIS\_RDS}, \underbrace{'VICTIM', 'NULL'}_{3CVE-2002-1142} \right\}$$

$Output(i, temp)$  là hàm mà các cá nhân thay thế của một kiểu tấn công cụ thể ( $ATTACK, Mid\_Host, VICTIM$ ) với các giá trị tương ứng trong  $i$ , tương ứng với ba chuỗi:  $ATTACK, Mid\_Host$  hoặc  $VICTIM$  hoặc trong  $temp$ . Ví dụ được liệt kê trong tương quan về chức năng ( $i, temp$ ), cuộc tấn công khởi tạo IIS\_RSD ( $Money, Maude$ ) được tạo ra thông qua chức năng IIS\_RDS ( $output(i, temp)$ ).

$Ins(P(et)) \cap / \cup // \sigma // \Pi /$  là hàm khởi tạo của mỗi công thức vị từ  $P(et)$  theo tập các thông tin ban đầu. Các hành động của intersection/union/difference/selection/projection/join được xác định trong cơ sở dữ liệu quan hệ.

**Algorithm:** Attack/vulnerability correlation

**Input:** A set of attack types  $E$ , a set of vulnerability types  $V$ , a set of attack types' prerequisites  $TP$ , a set of attack types' consequences  $TC$ , initial information set  $TI$ , and a protected goal  $G$ .

**Output:** Correlated attacks/vulnerabilities set  $S_{ve}$ .

*/\* The detail of Forward\_search \*/*

$S_{found} \leftarrow \phi, S_{current} \leftarrow \phi, SC_{current} = TI, SC'_{current} \leftarrow \phi, S_{ve} \leftarrow \phi, sign = 0;$  */\* Initialization \*/*

While  $((SC_{current} \setminus G) \cap P(E)) \neq \phi$  */\*  $P(E) = \bigcup_i P(e_i)$  \*/*

For each  $e_i \in E$  do

$P(e_i) = \sigma_{e_i} TP;$

If  $((SC_{current} \setminus G) \cap P(e_i)) \neq \phi$

$temp1 = \forall P(e_i);$

For each  $a \in ins(P(e_i))$  do

If  $\Pi_a SC_{current} \neq \phi$   $temp_i = \Pi_a SC_{current} \setminus A_a;$  */\*  $A_a$  is predicates matched before \*/*

Else  $temp_i = A_a;$

$temp2 = \forall temp_i;$

For each  $i \in temp2$  do

If  $correlation(i, temp) == TRUE$  */\* Find all possible successful attacks \*/*

$e_i(output(i, temp)) \rightarrow S_{current}, C(e_i) = \sigma_{e_i}(TC), SC'_{current} = \cup C(e_i);$

$S_{found} = \cup S_{current}, C(e_i) \rightarrow TI, S_{ve} = \cup(P(e_i), e_i), S_{ve} = \cup(e_i, C(e_i));$

For each  $d \in C(e_i)$  do

If  $(d == G)$   $sign = 1;$

$SC_{current} \leftarrow SC'_{current}, SC'_{current} \leftarrow \phi;$

If  $(sign == 1)$   $(S_{ve}, S_{found}) = Backward\_search(S_{ve});$  */\* delete the redundancy through Backward\_search \*/*

Else Print ("G is enough secure");

**Hình 5.** Thuật toán tương quan attack/vulnerability.

Hình 5 trình bày các thuật toán được đề xuất về mối tương quan attack/vulnerability. Nó bao gồm hai thủ tục: Forward\_search và Backward\_search. Đối với giới hạn không gian và các chi tiết của Backward\_search tương tự như của Forward\_search, chỉ có chi tiết của Forward\_search được mô tả trong thuật toán tương quan attack/vulnerability. Thủ tục

Forward\_search bắt đầu kết hợp các điều kiện tiên quyết của các kiểu tấn công với các lỗ hổng gốc ban đầu, trong khi giai đoạn ban đầu của thủ tục Backward\_search là kết hợp các hậu quả của các kiểu tấn công với mục tiêu được bảo vệ. Hai thủ tục này đảm bảo rằng các cuộc tấn công cần thiết và đầy đủ đối với các điều kiện ban đầu và mục tiêu được tìm thấy. Hơn nữa, phương pháp chỉ phân tích các loại tấn công mà điều kiện tiên quyết của nó được thay đổi và phù hợp với chúng với tính dễ bị tổn thương được áp dụng mỗi lần lặp. Phương pháp này có thể tiết kiệm rất nhiều thời gian và không gian trong toàn bộ quá trình tương quan.

#### Module 4: Đường dẫn tấn công

Trong mô hình phân tích lỗ hổng mạng, module hiển thị phân tích bằng kết quả tương quan, và tiếp tục xây dựng một sơ đồ trực tiếp các điều kiện prerequisites/consequences phụ thuộc vào các cuộc tấn công và các lỗ hổng với các chức năng của RDBMS [14]. Thuật toán trực quan hóa các đường dẫn tấn công được thể hiện trong Hình 6. Một phương pháp biểu diễn linh hoạt có cả lỗ hổng và tấn công như là đỉnh được sử dụng để diễn tả các đường dẫn tấn công tiềm ẩn. Các cạnh trực tiếp chỉ đại diện cho sự phụ thuộc chung. Một cạnh phụ thuộc  $e = (v, s)$  đi từ lỗ hổng  $v$  đến tấn công  $s$  có nghĩa là  $v$  là điều kiện tiên quyết của  $s$ . Tương tự, biên độ phụ thuộc  $e = (v, s)$  đi từ tấn công đến lỗ hổng  $v$  có nghĩa là  $v$  là hệ quả của  $s$ . Đồng thời, chúng tôi chỉ hiển thị một loại lỗ hổng, tức là chỉ như các điều kiện tiên quyết của cuộc tấn công trong đồ thị trực tiếp để giảm không gian hiển thị. Kết quả là một tập hợp các đường dẫn tấn công trực quan dẫn từ trạng thái mạng ban đầu đến một mục tiêu tấn công được xác định trước. Nó cũng hiển thị như thế nào kẻ tấn công sẽ khai thác lỗ hổng hệ thống để đạt được bước xâm nhập của mình từng bước. Công việc này giúp các quản trị viên phát hiện các chiến thuật tấn công cấp cao.

**Algorithm:** Visualization of attack paths

**Input:** Correlated attacks/vulnerabilities set  $S_{ve}$ , a set of discovered successful attacks  $S_{found}$ , a protected goal  $G$ .

**Output:** The graph of attack paths.

$P_{ing} = \Pi_{preparing} S_{ve}$ ,  $P_{ed} = \Pi_{prepared} S_{ve}$ ;

```

For each  $v \in P_{ing}$  {
  If  $v \notin P_{ed}$  {
     $e = \Pi_{prepared} (\sigma_{preparing=v} S_{ve})$ ;
    BuildGraph ( $v, e$ );} /*Build directed graph from prerequisite  $v$  to attack  $e$ */
  Else if  $v \in S_{found}$  {
     $v' = \Pi_{prepared} (\sigma_{preparing=v} S_{ve})$ ;
    If  $v' = G$  BuildGraph ( $v, v'$ ); /*Build directed graph from attack  $v$  to the protected goal  $G$ */
    Else {
       $e = \Pi_{prepared} (\sigma_{preparing=v} S_{ve})$ ;
      BuildGraph ( $v, e$ );} /*Build directed graph from attack  $v$  to attack  $e$ */
    }
}

```

Hình 6. Thuật toán trực quan hóa các đường dẫn tấn công.

### 2.3. Các kỹ thuật thực hiện chính của hệ thống NetScope

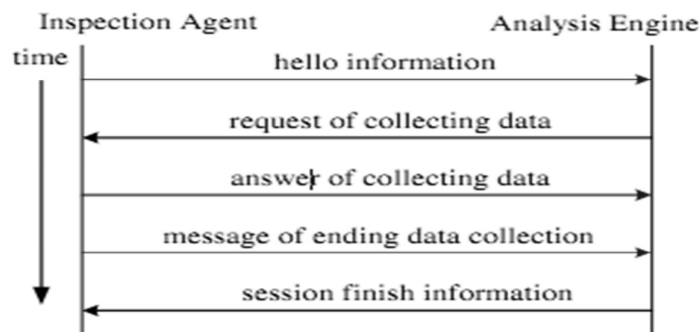
Thiết kế của NetScope phải đáp ứng các yêu cầu về truyền thông thời gian thực và bảo mật dữ liệu. Hai loại cơ chế được áp dụng với việc xem xét truyền thông an toàn và hiệu suất thời gian quan trọng.

#### 2.3.1. Giao tiếp an toàn qua SSL / TLS

Bất kỳ phần mềm ứng dụng nào với kiến trúc C/S phải giải quyết vấn đề giao tiếp an toàn giữa máy chủ và máy khách. Có hai loại yêu cầu truyền thông trong hệ thống NetScope:

– Truyền dữ liệu giữa tác nhân kiểm tra và trung tâm dữ liệu, giữa công cụ phân tích và trung tâm dữ liệu. Cơ chế mã hoá dữ liệu được cung cấp bởi RDBMS SQL Server 2000 được thông qua để đảm bảo tính bảo mật của việc vận chuyển tập dữ liệu.

– Kiểm soát truyền thông tin giữa công cụ phân tích và tác nhân kiểm tra. Giao thức vận chuyển SSL/TLS giữa lớp vận chuyển và lớp ứng dụng được giới thiệu để đạt được mã hóa tin nhắn giữa công cụ phân tích và tác nhân kiểm tra. Một quá trình giao tiếp hoàn chỉnh giữa chúng được thể hiện trong *Hình 7*. Nó được chia thành 5 cụm thông tin liên lạc: Thông tin xin chào, yêu cầu thu thập dữ liệu, trả lời về thu thập dữ liệu, thông báo kết thúc thu thập dữ liệu và thông tin kết thúc phiên làm việc. Trong một quá trình đánh giá hoàn chỉnh, năm cụm từ này xảy ra theo một trật tự cố định.



Hình 7. Giao tiếp giữa công cụ phân tích và tác nhân kiểm tra.

#### 2.3.2. Kỹ thuật để cải thiện hiệu suất thời gian

Có hai kỹ thuật để cải thiện hiệu suất thời gian là đa luồng và chức năng lười biếng được áp dụng để cải thiện hiệu suất thời gian.

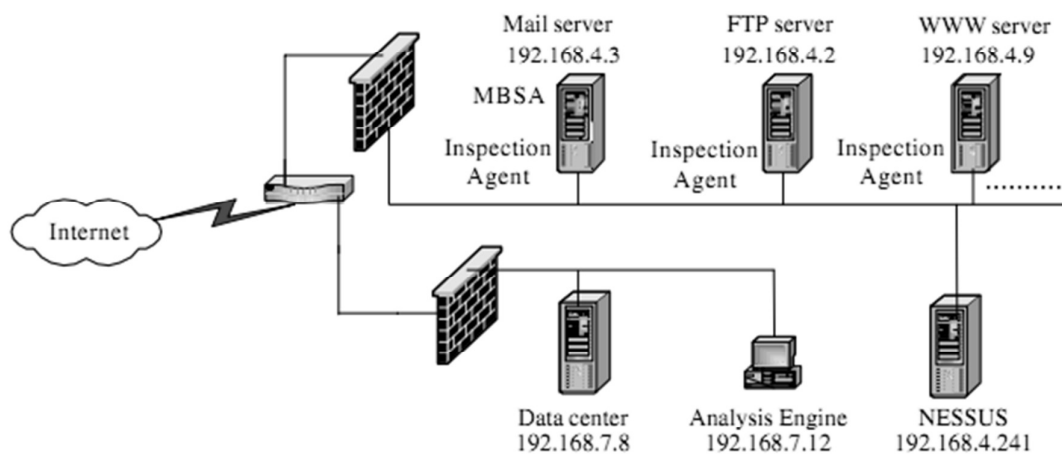
– *Đa luồng* (Multi-thread): Một luồng công việc độc lập được khởi động cho mỗi công việc đánh giá trên công cụ phân tích. Hơn nữa, tất cả các luồng chạy song song từ đầu đến

cuối của đánh giá lỗ hổng. Ví dụ, công cụ phân tích sẽ khởi động tối đa 255 luồng cho toàn bộ phân lớp mạng C. Cơ chế đa luồng có thể cải thiện hiệu quả đánh giá trong một mạng lưới quy mô lớn, bởi vì một chủ đề khác vẫn thực hiện nhiệm vụ đánh giá khi một chủ đề đang đợi chuyển dữ liệu vào trung tâm dữ liệu.

– *Hàm lười (Lazy function)*: Một tùy chọn chức năng lười biếng được đặt trên tác nhân kiểm tra để giảm thời gian chạy. Nó có nghĩa là nếu chúng ta kích hoạt tùy chọn này trên một tác nhân cụ thể, nó không khởi động một chủ đề khi nhận được yêu cầu thu thập dữ liệu ngay lập tức. Ngược lại, nó xác định xem có tồn tại một luồng công việc trong hệ thống không. Nếu có, nó chờ đợi cho kết thúc của chủ đề làm việc và nộp kết quả của nó cho công cụ phân tích. Nếu không, nó bắt đầu một chủ đề mới cho nhiệm vụ này. Khi một tác nhân nhận được nhiều yêu cầu cùng một lúc, nó thực sự khởi động một luồng để tiết kiệm được nhiều tài nguyên hệ thống.

### 3. THỬ NGHIỆM

Môi trường thí nghiệm thể hiện trong *Hình 8* được thiết lập để kiểm tra hiệu năng của hệ thống NetScope trong việc đánh giá chính xác, hiệu quả và xây dựng các đường tấn công tiềm ẩn. Công cụ phân tích của hệ thống NetScope đã được thiết lập trên máy chủ 192.168.7.12 để thiết lập các tùy chọn đánh giá, thực hiện hệ thống điều khiển và phân tích các kết quả được lưu trữ trong trung tâm dữ liệu.



**Hình 8.** Mô hình thử nghiệm.

Ta xem xét các máy chủ khác trong mạng này như các mục tiêu đánh giá và thiết lập các tác nhân kiểm tra trên các máy này để thu thập tập dữ liệu về cấu hình hệ thống.

**Thí nghiệm 1: Trên Mail sever với hai nhóm**

*Nhóm 1:* Đánh giá an toàn đối với IE 6.0 trên máy chủ mail chạy Win2K mà không có bản vá bởi hai hệ thống: NetScope và MBSA. Kết quả được trình bày trong Bảng 4.

*Nhóm 2:* Cấu hình của mail server được thay đổi bằng cách cài đặt SP1 của IE 6.0 và IIS 5.0, và hai hệ thống đánh giá được sử dụng để tìm các lỗ hổng của IIS 5.0. Bảng 5 liệt kê các kết quả bằng cách áp dụng MBSA và NetScope.

**Bảng 4.** Kết quả kiểm tra IE 6.0 trong nhóm 1 của thí nghiệm 1

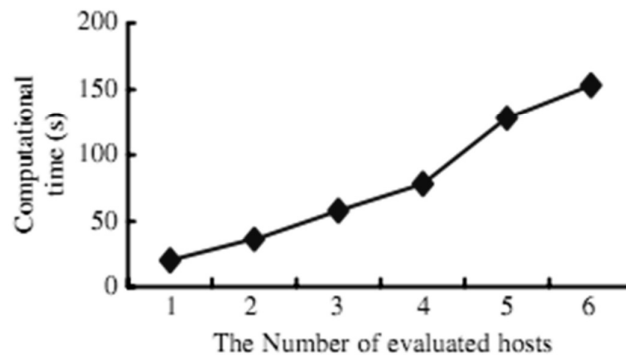
Assessing system	MBSA	NetScope		
The number of vulnerabilities discovered	3	8		
Specific vulnerability discovered	MS04-004 IE6 MS03-030	CAN-2002-0371 CVE-2002-0023 CAN-2003-1328	CAN-2002-0189 CVE-2002-0026 CAN-2003-0346	CAN-2002-0193 CAN-2003-1326

**Bảng 5.** Kết quả kiểm tra IE 6.0 trong nhóm 1 của thí nghiệm 1  
Kết quả đánh giá IIS 5.0 trong nhóm 2 của thí nghiệm 1

Assessing system	MBSA	NetScope
The number of vulnerabilities discovered	2	6
Specific vulnerability discovered	MS01-026, MS01-033	CVE-2002-0073, CVE-2001-0333, CVE-2000-0886, CVE-2000-0884, CVE-2002-0074, CAN-2003-0109

**Thí nghiệm 2: Kiểm tra cho nhiều máy chủ**

Kết quả thời gian tính toán trung bình cho nhiều máy chủ với 343 định nghĩa về lỗ hổng được thể hiện trong Hình 9.

**Hình 9.** Thời gian tính toán trung bình cho nhiều máy chủ của NetScope.

#### 4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này chúng tôi đã trình bày phương pháp mới đó là phương pháp hình thức đặc tả logic cho việc đánh giá và phân tích lỗ hổng an ninh mạng, các kết quả đã được trình bày ở nội dung bài báo này cho thấy lợi ích của việc sử dụng phương pháp hình thức trong việc áp dụng vào vấn đề an toàn an ninh mạng đang là vấn đề thời sự nóng hiện nay ở Việt Nam cũng như trên toàn thế giới. Trong thời gian tới hướng tiếp theo từ kết quả của bài báo này chúng tôi sẽ trình bày phương pháp xây dựng đồ thị tấn công khi đã đánh giá và phân tích lỗ hổng an ninh thông qua đó giúp các nhà quản trị hay người dùng có thể nhận biết và phán đoán các cuộc tấn công mạng thông qua lỗ hổng hệ thống mạng.

Cuối cùng nhóm tác giả cũng xin chân thành cảm ơn đề tài CS17.11 “*Phương pháp hình thức dựa trên đặc tả logic cho việc phát hiện và phân tích lỗ hổng an ninh mạng*” đã hỗ trợ để tác giả có thể hoàn thành bài báo này.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ammann, P., Wijesekera, D., & Kaushik, S. (2002), “*Scalable, graphbased network vulnerability analysis*”.*Proceedings of 9th ACM Conference on Computer and Communication Security, Washington, D.C., USA*
2. Baldwin, R. (1994), Kuang, “Rule based security checking. Cambridge”:*MIT Technical Report, MIT Lab for Computer Science, Programming Systems Research Group.*
3. CERT Coordination Center (2006), *CERT/CC statistics 1988–2004*.Pittsburgh: CERT Coordination Center accessed September 24, from [http://www.cert.org/stats/cert\\_stats.html](http://www.cert.org/stats/cert_stats.html).
4. Deraison, R., Gula, R., & Hayton, T. (2005), *Passive vulnerability scanning: Introduction to NeVO*. Accessed June 10.  
[http://www.tenablesecurity.com/white\\_papers/passive\\_scanning\\_tenable.pdf](http://www.tenablesecurity.com/white_papers/passive_scanning_tenable.pdf).
5. Farmer, D., & Spafford, E. H. (1991), “The cops security checkersystem”. *West Lafayette: Purdue University Technical report, CSD-TR-993.*
6. Fithen, W. L., Hernan, S. V., O’Rourke, P. F., et al. (2004), *Formal modeling of vulnerabilities*. Bell Labs Technical Journal, 8(4), pp.173–186.
7. Geng, S., Qu, W., & Zhang, L. (2001), *Discrete mathematics pp. 34-56*. Beijing: Tsinghua University Press.
8. Help and Support Home, Microsoft (2004), *Microsoft baseline security analyzer (MBSA) version 1.2.1 is available*. Accessed October 6.  
<http://support.microsoft.com/kb/320454/en-us>.

9. Hsu, C., & Wallace, W. (2007). “An industrial network flow information integration model for supply chain management and intelligent transportation”. *Enterprise Information Systems*, (1-3), pp.327–351.
10. International Institute of Standards and Technology (2004), *ICATmetabase-your CVE vulnerability search engine*. Accessed June 10.  
<http://icat.nist.gov/>.
11. Internet Security Systems (2005), *Vulnerability assessment*. Accessed March 10, 2005, from [http://www.iss.net/find\\_products/vulnerability\\_assessment.php](http://www.iss.net/find_products/vulnerability_assessment.php).
12. Jajodia, S., Noel, S., & O’Berry, B. (2003), *Topological analysis of network attack vulnerability*. Managing cyber threats: Issues, approaches and challenges, chapter 5. Norwell: Kluwer Academic.
13. Kotenko, I. (2003), “Active vulnerability assessment of computer networks by simulation of complex remote attacks”. *International Conference on Computer Networks and Mobile Computing*, October 20–23, Shanghai, China, pp.40–47,
14. Li, T., Feng, S., & Li, L. (2001), *Information visualization for intelligent decision support systems*. Knowledge-Based Systems, 14(5–6), pp.259–262.
15. Martin, R. A. (2003), “Integrating your information security vulnerability management capabilities through industry standards (CVE & OVAL)”. *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 2., October 5–8, pp.1528–1533
16. McAfee (2003), [http://www.mcafeeasap.com/intl/EN/content/cybercop\\_asap/default.asp](http://www.mcafeeasap.com/intl/EN/content/cybercop_asap/default.asp)
17. Ritchey, R., & Ammann, P. (2000), “Using model checking to analyze network vulnerabilities”, *Proceedings of IEEE Symposium on Security and Privacy*, Oakland: IEEE. pp. 156–165.
18. Zerkle, D., & Levitt, K. (1996), *Netkuang—a multi-host configuration vulnerability checker*, Proceedings of the 6th USENIX Security Symposium, San Jose, California, USA.
19. Ning, P., & Cui, Y. (2002), “An intrusion alert correlator based on prerequisites of intrusions”. *Raleigh: North Carolina State University Technical Report, TR-2002-01, Department of Computer Science*.
20. Ritchey, R., Berry, B., & Noel, S. (2002), “Representing TCP/IP connectivity for topological analysis of network security”, *The 18th Annual Computer Security Applications Conference*, December 9–13, San Diego, CA, USA.
21. Wojcik, M., Bergeron, T., Wittbold, T., et al. (2005), “Introduction to OVAL: A new language to determine the presence of software vulnerabilities”, *Accessed July 10, 2005*. <http://oval.miter.org/documents/doc-03/intro/intro.html>.
22. ICAT (2004), The ICAT Metabase, National Institute of Standards and Technology, Computer Security Division, Gaithersburg, MD, <http://icat.nist.gov/icat.cfm>

## USING A LOGICAL SPECIFICATION METHOD FOR EVALUATING AND ANALYZING NETWORK SECURITY VULNERABILITIES

**Abstract:** *It is important for system administrators to know about security vulnerabilities. However, existing vulnerability assessment methods may experience high bias rates, long calculation times. Moreover, they are only capable of locating individual vulnerabilities on a host server regardless of the corresponding performance of vulnerabilities on the server or part of the network with vulnerabilities that can be addressed. Distributed among different machines. To address these issues, we propose a formal methodology that uses a logical specification for evaluating and analyzing network security vulnerabilities. With this method vulnerabilities are detected without the need to simulate attacks and it can also easily integrate with other security tools based on relational databases.*

**Keywords:** *Network security, vulnerability assessment, Security vulnerability, Predicate logic*



## SIMPLE CORE-SHELL MODEL FOR A SOFT NANO PARTICLES AND VIRUS WITH ANALYTICAL SOLUTION

Phung Thi Huyen<sup>1</sup>, Luong Thi Theu<sup>1</sup>, Dinh Thi Thuy<sup>2</sup>,

Dinh Thi Ha<sup>3</sup>, Nguyen Ai Viet<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Hanoi Pedagogical University 2

<sup>2</sup>Thai Binh University of Medicine and Pharmacy

<sup>3</sup>Hanoi National University of Education

<sup>4</sup>Institute of Physics

**Abstract:** *In some recently experiments with virus, their core part are DNA tightly packed with very high charge density. The contribution of this highly charged part to the electrical field outside virus now cannot be easily neglected in general case. In this work we propose a simple core-shell model for this type of soft particles and virus. The soft particles consider consisted from the two parts: a charged hard core with a high charge density and a charged outer layer. We assume that the core part is tightly condensed, so the charge carriers of DNA can be partly bounded and partly moved. With this consideration, the core part now is very look like the outside solution. The corresponding Poisson-Boltzmann equations for this new model can be solved analytically. These analytical solutions would be useful in the investigation the problem of virus with charged core, such as in bacteriophage MS2.*

**Keywords:** *Soft nano, virus, core-shell structure, charge density of AND, Poisson-Boltzmann equation, analytical solutions.*

Email: phunghuyen.9xhpu2@gmail.com

Received 20 June 2017

Accepted for publication 10 September 2017

### 1. INTRODUCTION

In the last years, nanotechnology has a rapid advancement and opened up novel wide range of applications in life science and material science [1-3]. Because the complexity of biological structures and the variation of solvents, despite many effort to theoretical investigation to understand the properties of soft particles [1, 4-7], the theoretical models still face a variety of problematic issues and challenges. Thus, the construction of simple physics models to explain new observed phenomena and experimental data are important to the understanding of these complex systems.

One of such simple models for soft nano particles was introduced in the works of Ohshima [5-8]. The Ohshima's model provides a powerful tool for investigating the behavior of biocolloidal particles, also viruses and bacteria. In Ohshima's model, the soft particles are described as a non-penetrable neutral hard core coated by an ion permeable polyelectrolyte soft layer with negative constant volume density charge. The electric potential distribution of this system then is obtained by solving the Poisson-Boltzmann equations. At present, improved Ohshima models of soft nano particles are found much application in the works [9-14].

In many present investigations, charge of the core part of virus has been rarely taken into account. In most cases, a core charge is assumed to be neglected, so the electrical potential outside the core remains unchanged. A theoretical study mentioned the charge of the virus core in general cases to calculate the nonspecific electrostatic interactions in virus systems. Recently, experiment data of the case of bacteriophage MS2 [15] have shown that the ratio between the volume charge density of the core and that of the surface layer is measured to be half of that found suggesting that the effect of the core charge on the electrostatic, so electrokinetic properties of the particle should be re-examined.

For explanation this observed phenomenon, a new core-shell model for soft nano particles was proposed in the work [16] with the consideration that soft particle consists from two parts: a charged hard core with a volume charge density and a charged outer layer. Using this model, the contribution of the core parameters, such as the core charge and the core dielectric constant are studied. The model still complicated and can be solved by numerical method only.

In this work we propose a simple core-shell model for a soft particles and virus, based on the assumption the core part is tightly condensed that the charge carriers of DNA can be partly bounded and partly moved [17]. With this assumption, the core part now is very look like the outside solution. The corresponding Poisson-Boltzmann equations for this new model can be solved analytically. Our calculations provide the one of the first theoretical analytical investigations about the effects of temperature and salt concentration on the electrostatic properties, and could be applied to the case of virus with highly charged hard cores, such as bacteriophage MS2 [15].

## 2. OSHIMA MODEL FOR SOFT-PARTICLES

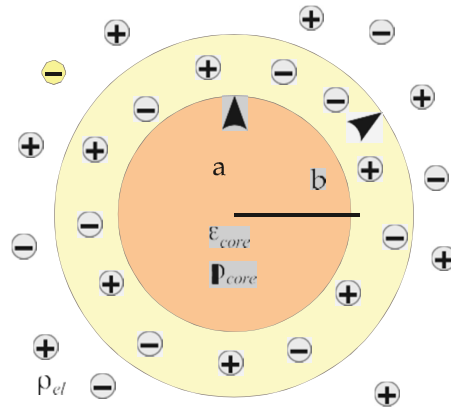
In the figure 1 we present our core-shell model for nano soft particles. We consider a soft particle with radius  $b$  immersed in an electrolyte solution. The soft particle is assumed to contain a hard core of radius  $a$  coated by an ion-penetrable surface charge layer of

polyelectrolyte with thickness  $(b - a)$ . Identified with the Ohshima model, the volume charge density of the soft shell is  $ZNe$ , where  $e$  is an electron charge,  $Z$  and  $N$  are the valence and the charge density of the polyelectrolyte ions, respectively.

The theoretical model of a soft particle including a hard core with the charge density  $\rho_{core}$  and the dielectric constant  $\epsilon_{core}$ , and an ion-penetrable surface layer of polyelectrolyte coated around. The soft particle is immersed in an electrolyte solution with the charge density  $\rho_{el}$  and the permittivity  $\epsilon_r$  (see in Fig. 1).

The electric potential distribution obeys the Poisson- Boltzmann equations [6, 15]

$$\begin{cases} \Delta\psi = -\frac{\rho_{el}}{\epsilon_r \epsilon_0}, & b \leq r < \infty \\ \Delta\psi = -\frac{\rho_{el} + ZNe}{\epsilon_r \epsilon_0}, & a \leq r < b \\ \Delta\psi = -\frac{\rho_{core}}{\epsilon_{core} \epsilon_0}, & 0 \leq r < a \end{cases} \quad (1)$$



**Fig 1.** The theoretical core-shell model of soft nano particles with a hard core charge.

Here  $\epsilon_0$  are the permittivity of vacuum, the charge distribution density  $\rho_{el}$  is the Boltzmann distribution:

$$\rho_{el}(r) = \sum_{i=1}^M z_i e n_i \exp\left(-\frac{z_i e \psi}{k_B T}\right), \quad (2)$$

where  $M$ ,  $z_i$ ,  $n_i$  are the number ion types, the  $i^{\text{th}}$  ionic valance and the ion concentration in solution, respectively. Considering a simple case that the solution only contains a monovalent salt  $M = 2$  and  $z_i = \{-z, z\}$ , we get:

$$\rho_{el}(r) = -2nze \sinh\left(\frac{ze\Psi}{k_B T}\right). \quad (3)$$

In the case of a low potential, the charge density in the electrolyte solution is given by:

$$\rho_{el}(r) = \frac{2nz^2 e^2}{k_B T} \Psi, \quad (4)$$

Substituting Eq. (4) into Eq. (1) provides:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2d\Psi}{rdr} = \kappa^2\Psi, \quad b \leq r < \infty \\ \frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2d\Psi}{rdr} = \kappa^2\left(\Psi - \frac{ZNe}{\kappa^2 \varepsilon_r \varepsilon_0}\right), \quad a \leq r < b \\ \frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2d\Psi}{rdr} = -\frac{\rho_{core}}{\varepsilon_{core} \varepsilon_0}, \quad 0 \leq r < a \end{array} \right. \quad (5)$$

where  $\kappa^2 = 2z^2 e^2 n / \varepsilon_r \varepsilon_0 k_B T$  is the Debye-Huckel parameter.

The spherical Poisson-Boltzmann equation (5) does not have a general analytical solution and can be numerically solved only.

### 3. NEW SIMPLE CORE-SHELL MODEL FOR SOFT NANO PARTICLES

In this part we propose a new model for soft nano particles and the virus. This simple model can be solved analytically. Due to the tidily packed effect, we hypothesis that chare of DNA in the virus core is quasi-bounded or can move quasi-freely [17] like the charge in solvent, then in the expression (5) the third equation has the same form of first equation. The electric potential distribution now satisfies new Poisson- Boltzmann equations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2d\Psi}{rdr} = \kappa^2\Psi, \quad b \leq r < \infty \\ \frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2d\Psi}{rdr} = \kappa^2\left(\Psi - \frac{ZNe}{\kappa^2 \varepsilon_r \varepsilon_0}\right), \quad a \leq r < b \\ \frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2d\Psi}{rdr} = -\kappa_{core}^2 \Psi, \quad 0 \leq r < a \end{array} \right. \quad (6)$$

where  $\kappa_{core}^2 = \rho_{core} / \varepsilon_{core} \varepsilon_0$  is the Debye-Huckel parameter of core.

The general solution of Eq. (6) gives us:

$$\begin{aligned}\psi(r) &= A_1 \frac{e^{-kr}}{r} + B_1 \frac{e^{kr}}{r}, & b \leq r \leq \infty \\ \psi(r) &= A_2 \frac{e^{-kr}}{r} + B_2 \frac{e^{kr}}{r} + \frac{ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0}, & a \leq r \leq b \\ \psi_{\text{core}} &= A_3 \frac{e^{-k_{\text{core}} r}}{r} + B_3 \frac{e^{k_{\text{core}} r}}{r}, & 0 \leq r \leq a\end{aligned}\quad (7)$$

The coefficients  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ , and  $B_3$  in Eq. (7) can be found by applying the following boundary conditions:

$$\psi(\infty) = 0, \quad \psi(0) \neq \infty, \quad (8)$$

$$\psi(a^-) = \psi(a^+), \quad \psi(b^-) = \psi(b^+), \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\text{core}} \varepsilon_0 \psi'(a^-) = \varepsilon_r \varepsilon_0 \psi'(a^+), \quad \psi(b^-) = \psi(b^+), \quad (10)$$

The founding of the solution of system of equations (7-10) is very difficult in general cases. We try to solve this problem in the next section.

#### 4. ANALYTICAL SOLUTION OF THE MODEL

In this part we solve the system of equations (7-10) and derive the coefficients  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ , and  $B_3$  in explicit analytical forms.

At infinity the electrical potential must be zero, we can put  $B_1 = 0$ , and using the above boundary we get a linear system of equations for five variable  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $B_2$ , and  $B_3$

$$\begin{aligned}A_1 \frac{e^{-ka}}{a} &= A_2 \frac{e^{-ka}}{a} + B_2 \frac{e^{ka}}{a} + \frac{ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0}, \\ A_1 \left[ -k \frac{e^{-ka}}{a} - \frac{e^{-ka}}{a^2} \right] &= A_2 \left[ -k \frac{e^{-ka}}{a} - \frac{e^{-ka}}{a^2} \right] + B_2 \left[ k \frac{e^{ka}}{a} - \frac{e^{ka}}{a^2} \right], \\ A_2 \frac{e^{-kb}}{b} + B_2 \frac{e^{kb}}{b} + \frac{ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} &= A_3 \frac{e^{-k_{\text{core}} b}}{b} + B_3 \frac{e^{k_{\text{core}} b}}{b}, \\ A_2 \left[ -k \frac{e^{-kb}}{b} - \frac{e^{-kb}}{b^2} \right] + B_2 \left[ k \frac{e^{kb}}{b} - \frac{e^{kb}}{b^2} \right] &= A_3 \left[ -k_{\text{core}} \frac{e^{-k_{\text{core}} b}}{b} - \frac{e^{-k_{\text{core}} b}}{b^2} \right] + B_3 \left[ k_{\text{core}} \frac{e^{k_{\text{core}} b}}{b} - \frac{e^{k_{\text{core}} b}}{b^2} \right],\end{aligned}\quad (11)$$

Taking the case of symmetrical solution we can put  $B_3 = -A_3$ , now we have a linear system of 4 equations for 4 variable  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , and  $B_2$

$$\begin{aligned}
A_1 \frac{e^{-ka}}{a} &= A_2 \frac{e^{-ka}}{a} + B_2 \frac{e^{ka}}{a} + \frac{ZNe}{k^2 \epsilon_r \epsilon_0}, \\
A_1 \left[ -k \frac{e^{-ka}}{a} - \frac{e^{-ka}}{a^2} \right] &= A_2 \left[ -k \frac{e^{-ka}}{a} - \frac{e^{-ka}}{a^2} \right] + B_2 \left[ k \frac{e^{ka}}{a} - \frac{e^{ka}}{a^2} \right], \\
A_2 \frac{e^{-kb}}{b} + B_2 \frac{e^{kb}}{b} + \frac{ZNe}{k^2 \epsilon_r \epsilon_0} &= A_3 \frac{e^{-k_{core}b}}{b} + B_3 \frac{e^{k_{core}b}}{b}, \\
A_2 \left[ -k \frac{e^{-kb}}{b} - \frac{e^{-kb}}{b^2} \right] + B_2 \left[ k \frac{e^{kb}}{b} - \frac{e^{kb}}{b^2} \right] &= A_3 \left[ -k_{core} \left( \frac{e^{k_{core}b} + e^{-k_{core}b}}{b} \right) - \left( \frac{e^{k_{core}b} - e^{-k_{core}b}}{b^2} \right) \right],
\end{aligned} \tag{12}$$

Above linear system of equations can be solved analytically. For easier to see that, we replace  $A_1 \rightarrow x_1$ ,  $A_2 \rightarrow x_2$ ,  $B_2 \rightarrow x_3$ ,  $A_3 \rightarrow x_4$ , and  $k_{core} = k_c$ . We take the matrix form of this linear system of equations:

$$\Delta X = BX, \tag{13}$$

where  $\Delta$  is the (4x4) matrix

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{e^{-ka}}{a} & -\frac{e^{-ka}}{a} & \frac{e^{ka}}{a} & 0 \\ -k \frac{e^{-ka}}{a} - \frac{e^{-ka}}{a^2} & k \frac{e^{-ka}}{a} + \frac{e^{-ka}}{a^2} & \frac{e^{ka}}{a^2} - k \frac{e^{ka}}{a} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-kb}}{b} & \frac{e^{kb}}{b} & \frac{e^{k_c b} - e^{-k_c b}}{b} \\ 0 & -k \frac{e^{-kb}}{b} - \frac{e^{-kb}}{b^2} & k \frac{e^{kb}}{b} - \frac{e^{kb}}{b^2} & k_c \left( \frac{e^{-k_c b} + e^{k_c b}}{b} \right) - \frac{e^{k_c b} - e^{-k_c b}}{b^2} \end{pmatrix},$$

X and B are the 4-vectors:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{ZNe}{k^2 \epsilon_r \epsilon_0} \\ 0 \\ \frac{ZNe}{k^2 \epsilon_r \epsilon_0} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

The solutions of the matrix equation (13) can be obtained as follows:

$$x_1 = \frac{\det \Delta_1}{\det \Delta}, \quad x_2 = \frac{\det \Delta_2}{\det \Delta}, \quad x_3 = \frac{\det \Delta_3}{\det \Delta}, \quad x_4 = \frac{\det \Delta_4}{\det \Delta},$$

where the matrix determinants are:

$$\det \Delta = \begin{vmatrix} \frac{e^{-ka}}{a} & -\frac{e^{-ka}}{a} & \frac{e^{ka}}{a} & 0 \\ -k\frac{e^{-ka}}{a} - \frac{e^{-ka}}{a^2} & k\frac{e^{-ka}}{a} + \frac{e^{-ka}}{a^2} & \frac{e^{ka}}{a^2} - k\frac{e^{ka}}{a} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-kb}}{b} & \frac{e^{kb}}{b} & \frac{e^{k_c b} - e^{-k_c b}}{b} \\ 0 & -k\frac{e^{-kb}}{b} - \frac{e^{-kb}}{b^2} & k\frac{e^{kb}}{b} - \frac{e^{kb}}{b^2} & k_c \left( \frac{e^{-k_c b} + e^{k_c b}}{b} \right) - \frac{e^{k_c b} - e^{-k_c b}}{b^2} \end{vmatrix}$$

$$= 4 \frac{e^{-ka}}{a^3 b^2} [\sinh k(b-a) - \cosh k(b-a)] [k_c \cosh(k_c b) + k \sinh(k_c b)], \quad (15)$$

$$\det \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} & -\frac{e^{-ka}}{a} & \frac{e^{ka}}{a} & 0 \\ 0 & k\frac{e^{-ka}}{a} + \frac{e^{-ka}}{a^2} & \frac{e^{ka}}{a^2} - k\frac{e^{ka}}{a} & 0 \\ \frac{ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} & \frac{e^{-kb}}{b} & \frac{e^{kb}}{b} & \frac{e^{k_c b} - e^{-k_c b}}{b} \\ 0 & -k\frac{e^{-kb}}{b} - \frac{e^{-kb}}{b^2} & k\frac{e^{kb}}{b} - \frac{e^{kb}}{b^2} & k_c \left( \frac{e^{-k_c b} + e^{k_c b}}{b} \right) - \frac{e^{k_c b} - e^{-k_c b}}{b^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} \left\{ k \frac{1}{ab^2} \cosh k(b-a) \left[ k_c \cosh(k_c b) - \frac{1}{a} \sinh(k_c b) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{ab^2} \sinh k(b-a) \left[ \frac{1}{a} k_c \cosh(k_c b) - k^2 \sinh(k_c b) \right] + \frac{1}{a^3 b} \left[ k_c \cosh(k_c b) - \frac{1}{b} \sinh(k_c b) \right] \right\}, \quad (16)$$

$$\det \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{e^{-ka}}{a} & \frac{ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} & \frac{e^{ka}}{a} & 0 \\ -k\frac{e^{-ka}}{a} - \frac{e^{-ka}}{a^2} & 0 & \frac{e^{ka}}{a^2} - k\frac{e^{ka}}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} & \frac{e^{kb}}{b} & \frac{e^{k_c b} - e^{-k_c b}}{b} \\ 0 & 0 & k\frac{e^{kb}}{b} - \frac{e^{kb}}{b^2} & k_c \left( \frac{e^{-k_c b} + e^{k_c b}}{b} \right) - \frac{e^{k_c b} - e^{-k_c b}}{b^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} \left[ \frac{e^{k(b-a)}}{a^2 b^2} (ka+1) (k_c \cosh(k_c b) - k \sinh(k_c b)) + \frac{2}{a^3 b^2} \left( k_c \cosh(k_c b) - \frac{1}{b} \sinh(k_c b) \right) \right], \quad (17)$$

$$\det \Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{e^{-ka}}{a} & -\frac{e^{-ka}}{a} & \frac{ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} & 0 \\ -k \frac{e^{-ka}}{a} - \frac{e^{-ka}}{a^2} & k \frac{e^{-ka}}{a} + \frac{e^{-ka}}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{-kb}}{b} & -\frac{ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} & \frac{e^{k_c b} - e^{-k_c b}}{b} \\ 0 & -k \frac{e^{-kb}}{b} - \frac{e^{-kb}}{b^2} & 0 & k_c \left( \frac{e^{-k_c b} + e^{k_c b}}{b} \right) - \frac{e^{k_c b} - e^{-k_c b}}{b^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} \left[ \frac{e^{-k(b+a)}}{a^2 b^2} (ka+1) \left( \frac{1}{b} \sinh(k_c b) - k_c \cosh(k_c b) \right) \right], \quad (18)$$

$$\det \Delta_4 = \begin{vmatrix} \frac{e^{-ka}}{a} & -\frac{e^{-ka}}{a} & \frac{e^{ka}}{a} & \frac{ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} \\ -k \frac{e^{-ka}}{a} - \frac{e^{-ka}}{a^2} & k \frac{e^{-ka}}{a} + \frac{e^{-ka}}{a^2} & \frac{e^{ka}}{a^2} - k \frac{e^{ka}}{a} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-kb}}{b} & \frac{e^{kb}}{b} & -\frac{ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} \\ 0 & -k \frac{e^{-kb}}{b} - \frac{e^{-kb}}{b^2} & k \frac{e^{kb}}{b} - \frac{e^{kb}}{b^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} \left[ k \frac{e^{-ka}}{a^2 b^2} (ka+1) + \left( k \frac{e^{-ka}}{a^3 b} + \frac{e^{-ka}}{a^3 b^2} \right) (\cosh k(b-a) - \sinh k(b-a)) \right], \quad (19)$$

$$\text{With: } m = \left[ k_c \cosh(k_c b) - \frac{1}{b} \sinh(k_c b) \right], \quad n = \left[ \frac{1}{a} k_c \cosh(k_c b) - k^2 \sinh(k_c b) \right],$$

$$h = [\sinh k(b-a) - \cosh k(b-a)].$$

Therefore, the coefficients  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , and  $B_2$  are

$$A_1 = \frac{\frac{4ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} \left\{ k \frac{1}{ab^2} \cosh k(b-a) \left[ k_c \cosh(k_c b) - \frac{1}{a} \sinh(k_c b) \right] + \frac{n}{ab^2} \sinh k(b-a) + \frac{m}{a^3 b} \right\}}{4h \frac{e^{-ka}}{a^3 b^2} [k_c \cosh(k_c b) + k \sinh(k_c b)]}, \quad (20)$$

$$A_2 = \frac{\frac{2ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} \left[ \frac{e^{k(b-a)}}{a^2 b^2} (ka+1) (k_c \cosh(k_c b) - k \sinh(k_c b)) + \frac{2}{a^3 b^2} m \right]}{4h \frac{e^{-ka}}{a^3 b^2} [k_c \cosh(k_c b) + k \sinh(k_c b)]}, \quad (21)$$



$$A_3 = -B_3 = \frac{\frac{ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} \left[ k \frac{e^{-ka}}{a^2 b^2} (ka+1) - h \left( k \frac{e^{-ka}}{a^3 b} + \frac{e^{-ka}}{a^3 b^2} \right) \right]}{2h \frac{e^{-ka}}{a^3 b^2} [k_C \cosh(k_C b) + k \sinh(k_C b)]}, \quad (22)$$

$$B_2 = \frac{\frac{ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0} [e^{-kb} (ka+1) (-m)]}{\frac{2h}{a} [k_C \cosh(k_C b) + k \sinh(k_C b)]}, \quad (23)$$

Finally the electrical potential of virus in our new model can be founded in the explicit analytical forms:

$$\begin{aligned} \psi(r) &= A_1 \frac{e^{-kr}}{r}, & b \leq r \leq \infty \\ \psi(r) &= A_2 \frac{e^{-kr}}{r} + B_2 \frac{e^{kr}}{r} + \frac{ZNe}{k^2 \varepsilon_r \varepsilon_0}, & a \leq r \leq b \\ \psi_{core}(r) &= A_3 \frac{2}{r} \sinh(k_{core} r), & 0 \leq r \leq a \end{aligned} \quad (24)$$

where the set of coefficients  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , and  $B_2$  are now well defined by the physical parameters of the virus and solution environment as above.

## 5. CONCLUSIONS

In many present investigations using the Oshima model for soft nano particles, the core charge distribution has been rarely taken into account. In most cases, a core part is neutral or core charge is assumed to be zero, so the electrical potential outside particles remains unchanged. In recently experiments with virus, the core part are the tightly confined DNA with very high charge density. The contribution of this high charged part to the electrical field outside virus now cannot be easily omitted in general and have to more detail investigation.

In this work we propose a simple core-shell model for soft particles. The soft particles consider consisted from the two parts: a charged hard core with a high charge density and a charged outer layer. We assume that the core part is tightly condensed, so the charge carriers of DNA can be partly bounded and partly moved. With this consideration, the core part now is very look like the outside solution. The corresponding Poisson-Boltzmann equations for this new model can be solved analytically.

We believe that using the obtained analytical solutions from our model with improvement by numerical calculation on PC could explain the identical properties of untreated-MS2 and RNA-free MS2 reported in works [15].

## REFERENCES

1. S. M. Louie, T. Phenrat, M. J. Small, R. D. Tilton, and G. V. Lowry (2012), *Langmuir* **28**, p.10334.
2. C. N. Likos (2006), *Soft Matter* **2**, p.478.
3. S. Nayak and L. A. Lyon(2005), *Angew. Chem. Int. Ed. Engl.* **44**, p.7686.
4. H. Ohshima (1994), *J. Colloid Interface Sci.* **163**, p.474.
5. W. J. Chen and H. J. Keh(2013), *J. Phys. Chem. B* **117**, p.9757.
6. H. Ohshima (2009), *Sci. Technol. Adv. Mater.* **10**, p.063001.
7. H. Ohshima (1995), *Adv. Colloid Interface Sci.* **62**, p.189.
8. H. Ohshima (2013), *Curr. Opin. Colloid Interface Sci.* **18**, 73.
9. Y. Liu, D. Janjaroen, M. S. Kuhlenschmidt, T. B. Kuhlenschmidt, and T. H. Nguyen (2009), *Langmuir* **25**, p.1594.
10. J. de Kerchove and M. Elimelech(2005), *Langmuir* **21**, p.6462
11. J. F. L. Duval and H. Ohshima(2006), *Langmuir* **22**, p.3533.
12. J. F. L. Duval and F. Gaboriaud (2010), *Curr. Opin. Colloid Interface Sci.* **15**, p.184.
13. J. Langlet, F. Gaboriaud, C. Gantzer, and J. F. L. Duval (2008), *Biophys. J.* **94**, p.293.
14. J. F. L. Duval, J. Merlin, and P. A. L. Narayana (2011), *Phys. Chem. Chem. Phys.* **13**, p.1037.
15. Thanh H. Nguyen, Nickolas Easter, Leolardo Gutierrez, Lauren Huyett, Emily Defnet, Steven E. Mylon, Jame K. Ferri and Nguyen Ai Viet (2011), *Soft Matter.* **7**, p.10449.
16. Anh D. Phan, Dustin A. Tracy, T. L. Hoai Nguyen, N. A. Viet, The-Long Phan and T.H. Nguyen (2013), *The Journal of Chemical Physics* **139**, p.244908.
17. Anh D. Phan, Do T. Nga, The-Long Phan, Le T. M. Thanh, Chu T. Anh, Sophie Bernad, and N. A. Viet (2014), *Phys. Rev. E* **90**, p.062707.

## MÔ HÌNH LỖI-VỎ ĐƠN GIẢN CHO CÁC HẠT NANO MỀM VÀ VIRUT VỚI LỜI GIẢI GIẢI TÍCH

**Tóm tắt:** Trong một số thí nghiệm hiện nay với virut, phân lõi của chúng có thể là các ADN cuộn chặt có mật độ điện tích rất cao. Đóng góp của lõi tích điện cao này vào điện thế quanh virut là không thể dễ dàng bỏ qua trong các trường hợp tổng quát. Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất một mô hình lõi – vỏ đơn giản cho các hạt nano mềm và virut. Hạt nano mềm được giả thuyết gồm 2 thành phần: một lõi cứng tích điện với mật độ điện tích cao và một lớp vỏ tích điện. Chúng tôi giả thiết rằng phân lõi đã được cuộn chặt, vì vậy các hạt tải điện của ADN có thể là bán cầm tù hoặc bán tự do. Với giả thuyết này, phân lõi sẽ giống với lớp bên ngoài virut. Phương trình Poisson-Boltzmann tương ứng với mô hình mới này có thể giải được và cho lời giải dưới dạng giải tích tường minh. Các lời giải dưới dạng giải tích tường minh này sẽ có ích trong việc nghiên cứu các virut có lõi tích điện, ví dụ như thực khuẩn thể MS2.

**Từ khóa:** Hạt nano mềm, Virut, Cấu trúc lõi-vỏ, Mật độ điện tích ADN, Phương trình Poisson-Boltzmann, Lời giải giải tích.

# NGHIÊN CỨU TÍNH CHẤT QUANG XÚC TÁC CỦA LỚP CHUYỂN TIẾP DỊ THỂ p-Si/n-ZnO/n-ZnO:Sn CẤU TRÚC DÂY NANO CHẾ TẠO BẰNG PHƯƠNG PHÁP THỦY NHIỆT

Nguyễn Đình Lãm<sup>1</sup>, Nguyễn Thị Hoa<sup>1</sup>, Nguyễn Văn Hùng<sup>1</sup>,  
Phạm Văn Vĩnh<sup>1</sup>, Đặng Trần Chiến<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

<sup>2</sup> Trường Đại học Tài nguyên & Môi trường Hà Nội

**Tóm tắt:** Để tăng hiệu suất phản ứng quang xúc tác của n-ZnO, chúng tôi đã pha vào n-ZnO một lượng Sn nhất định. Khi đó Sn<sup>4+</sup> thay vào các vị trí Zn<sup>2+</sup>, kết quả là có thêm hai electron tự do bổ sung, góp phần vào sự dẫn điện. Sự sai khác trong bán kính ion của Sn<sup>4+</sup> (0,071 nm) và Zn<sup>2+</sup> (0,074 nm) rất nhỏ nên các ion Sn<sup>4+</sup> có thể dễ dàng tích hợp vào các mạng tinh thể ZnO. Do đó ZnO pha tạp Sn có thể tăng khả năng dẫn điện cũng như quang xúc tác. Kết quả đo quang xúc tác cho thấy khi pha tạp Sn ở các nồng độ 0 % đến 3% thì sự giảm nồng độ RhB bởi p-Si/ZnO/n-ZnO:1%Sn thành nano là cao nhất so với các mẫu khác trong cùng một thời gian. Cấu trúc p-Si/ZnO/n-ZnO:Sn (1-3% Sn) thành nano thể hiện khả năng hoạt động quang xúc tác cao hơn so với cấu trúc p-Si/ZnO thành nano.

**Từ khóa:** ZnO pha tạp Sn, p-Si/n-Zn thành nano, p-Si/n-ZnO/n-ZnO:Sn thành nano.

Nhận bài ngày 11.8.2017; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 10.9.2017

Liên hệ tác giả: Nguyễn Đình Lãm; Email: lam.nd@hnue.edu.vn

## 1. MỞ ĐẦU

ZnO với vai trò là chất xúc tác quang hóa đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trên thế giới. Do các ưu điểm nổi bật của ZnO như giá thành rẻ, bền trong những điều kiện môi trường khác nhau, không độc hại, không gây ô nhiễm thứ cấp. ZnO dùng làm chất xúc tác sẽ đẩy nhanh quá trình phân hủy chất hữu cơ dưới ánh sáng tử ngoại (có bước sóng  $\lambda < 380$  nm) [1]. Vì vậy, vật liệu ZnO được nghiên cứu và sử dụng rộng rãi trong lĩnh vực xử lý môi trường nước và khí với vai trò là chất xúc tác quang hóa. Tuy nhiên, ZnO có độ rộng vùng cấm lớn (3.37 eV) do đó nó chủ yếu nhận kích thích trong vùng ánh sáng tử ngoại tức là trong phản ứng quang xúc tác, ZnO chỉ sử dụng được từ 3-5% năng lượng mặt trời [2]. Để làm tăng hiệu suất của phản ứng quang xúc tác của ZnO,

nhiều giải pháp khác nhau đã được nghiên cứu. Gần đây sự pha tạp kim loại hoặc oxit với ZnO giúp tăng khả năng quang xúc tác đã thu được nhiều sự chú ý của các nhóm các nhà khoa học khác nhau. Có nhiều biện pháp làm tăng khả năng quang xúc tác của ZnO. Vật liệu  $C_3N_4/ZnO$ ,  $Ag/ZnO$ ,  $CuS/ZnO$ , ZnO pha tạp Al cũng như màng ZnO nanorods trên đế Si có khả năng quang xúc tác mạnh đã được nghiên cứu chế tạo thành công [3-6]. Đối với p-Si/n-ZnO thanh nano thì lớp ZnO thanh nano có tác dụng hấp thu ánh sáng và chống phản xạ. Lớp tiếp xúc dị thể p-n khi ghép 2 vật liệu (ZnO và Si) có độ rộng vùng cấm khác nhau sẽ làm cản trở khả năng tái hợp của cặp điện tử - lỗ trống do đó hiệu suất quang xúc tác được cải thiện. Nhiều tạp chất kim loại hóa trị 4 đã được thêm vào n-ZnO để tăng cường tính chất điện và tính chất quang học của nó. Khi ZnO pha tạp Sn, các ion  $Sn^{4+}$  thay vào các vị trí  $Zn^{2+}$ , kết quả là có thêm hai electron tự do đóng góp đáng kể vào tính dẫn điện của ZnO. Do sự sai khác trong bán kính ion của  $Sn^{4+}$  (0,071 nm) và  $Zn^{2+}$  (0,074 nm) là rất nhỏ nên các ion  $Sn^{4+}$  có thể dễ dàng tích hợp vào mạng tinh thể ZnO [7]. Do đó ZnO pha tạp chất Sn có thể tăng khả năng dẫn điện cũng như quang xúc tác. Có nhiều kỹ thuật chế tạo màng ZnO khác nhau nhưng phương pháp sol-gel và thủy nhiệt là tương đối đơn giản và rẻ tiền. Do đó chúng tôi chọn hai phương pháp trên để chế tạo cấu trúc p-Si/n-ZnO/n-ZnO:Sn thanh nano. Việc đánh giá khả năng quang xúc tác của cấu trúc chế tạo được thông qua việc sử dụng chất thử là Rothamine B (RhB).

## 2. THỰC NGHIỆM

### 2.1. Chế tạo mẫu

20 ml dung dịch Isopropyl alcohol (IPA) có chứa 0.438 g  $Zn(CH_3COO)_2 \cdot 2H_2O$  được khuấy đều trong khoảng 1h bằng máy khuấy từ ở nhiệt độ phòng. Sau đó thêm 1 ml Diethylamine (DEA) vào dung dịch trên và tiếp tục khuấy từ trong khoảng 1h để được dung dịch đồng nhất và trong suốt có nồng độ 0.1 M. Đế silic được xử lý sạch bằng cách ngâm trong dung dịch NaOH khoảng 20 phút sau đó rửa bằng nước sạch rồi ngâm trong cồn khoảng 15 phút. Rửa lại đế bằng nước cất và sấy khô. Đế silic được phủ 1 lớp dung dịch trong suốt ZnO 0.1 M bằng phương pháp spin-coating với tốc độ 3000 vòng trong 30s. Sau đó lớp mỏng ZnO này gọi là mầm ZnO trên đế silic được sấy ở nhiệt độ 150 °C trong 20 phút. Lớp mầm này tiếp tục được ủ nhiệt bằng lò nung ở nhiệt độ 500°C trong 1h với tốc độ gia nhiệt 5°C/phút. Dung dịch thủy nhiệt được tạo ra như sau: Hòa tan  $Zn(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$  và  $C_6H_{12}N_4$  với tỉ lệ mol là 1:2 trong nước cất, nồng độ dung dịch là 20mM. Tạp chất  $SnCl_4 \cdot 5H_2O$  với các nồng độ khác nhau được pha vào dung dịch trên. Nồng độ pha tạp  $Sn^{4+}$  thay đổi từ 0 đến 3 % (% mol). Khuấy đều dung dịch bằng máy khuấy từ trong khoảng 60 phút. Lớp mầm ZnO trên đế silic được đặt trong bình thủy nhiệt

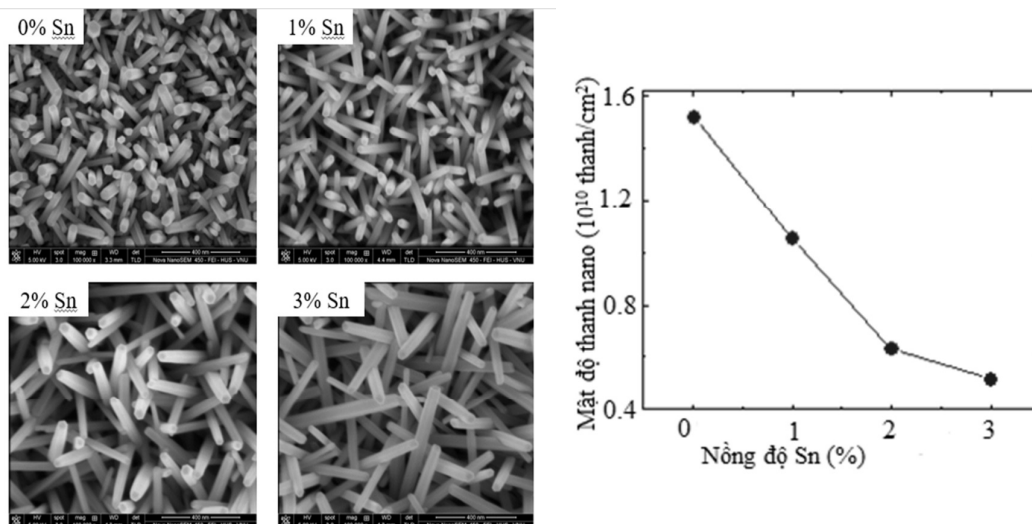
chứa dung dịch thủy nhiệt. Quá trình thủy nhiệt được tiến hành trong thời gian 120 phút ở nhiệt độ 80°C. Sau khi quá trình thủy nhiệt kết thúc, các mẫu thu được có cấu trúc p-Si/n-ZnO/n-Zn<sub>(1-x)</sub>Sn<sub>x</sub>O thanh nano được rửa bằng nước cất và sấy khô.

## 2.2. Khử quang xúc tác

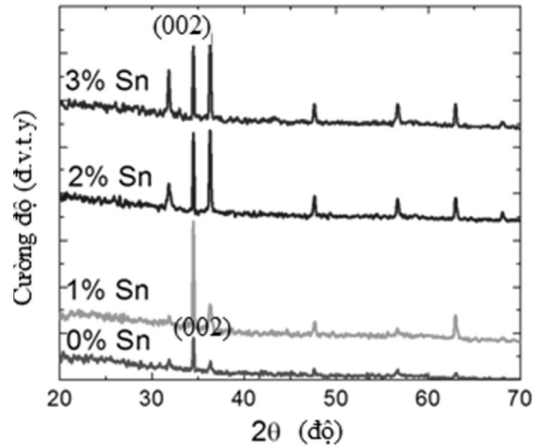
Hoạt tính quang xúc tác của mẫu chế tạo được khảo sát bởi quá trình phân hủy RhB dưới bức xạ cực tím (UV). Một mẫu kích thước 2x2 cm được đặt trong 100ml dung dịch RhB có nồng độ ban đầu là 5 mg.L<sup>-1</sup>. Nguồn tia cực tím là một đèn thủy ngân 250W đặt ở khoảng cách 30 cm để hạn chế tác dụng nhiệt. Trong khoảng thời gian 60 phút, cứ sau các khoảng thời gian nhất định (10 phút), 3 ml dung dịch lại được lấy ra và phân tích bởi quang phổ kế UV-Vis (Jasco, V-670) ở bước sóng 554nm. Sau mỗi chu kỳ, các mẫu được rửa để loại bỏ các phân tử dư và nhúng lại vào dung dịch sạch với cùng nồng độ và thể tích như trước. Quá trình này được lặp lại để xác nhận rằng cấu trúc có khả năng tái sử dụng. Khả năng đáp ứng quang điện được xác định với các thiết bị gồm đồng hồ vạn năng Keithley 2000, nguồn cấp điện một chiều và đèn thủy ngân 250W.

## 3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Ảnh SEM của cấu trúc ZnO thanh nano với các nồng độ pha tạp Sn khác nhau và đồ thị mô tả sự thay đổi mật độ thanh nano ZnO:Sn theo nồng độ pha tạp Sn thể hiện ở Hình 1. Hình ảnh cho thấy với nồng độ Sn thay đổi từ 0% đến 3%, kích thước thanh nano thay đổi không đáng kể nhưng có sự thay đổi mật độ rõ rệt.



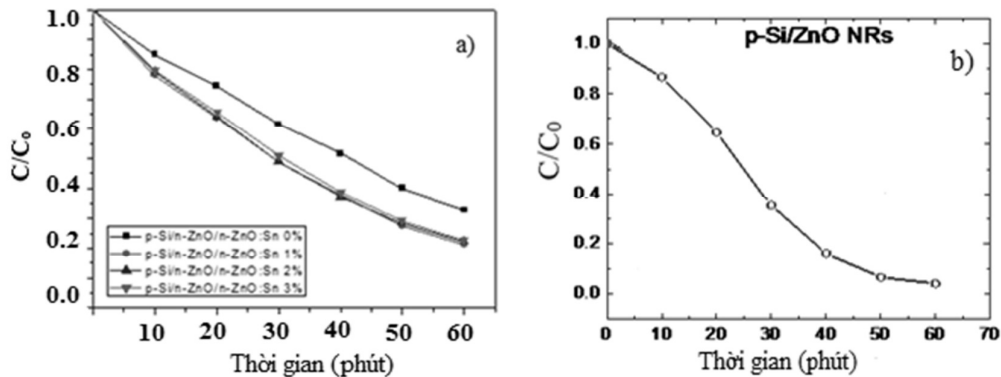
**Hình 1.** Ảnh SEM của các cấu trúc ZnO:Sn thanh nano với các nồng độ Sn thay đổi từ 0% đến 3% và đồ thị mô tả sự thay đổi mật độ thanh nano ZnO:Sn theo nồng độ pha tạp Sn.



**Hình 2.** Giảm đồ nhiễu xạ tia X của các mẫu ZnO:Sn thanh nano với nồng độ Sn từ 0% đến 3%.

Hình 2 là giảm đồ nhiễu xạ tia X của các cấu trúc ZnO:Sn thanh nano với các nồng độ Sn thay đổi từ 0% đến 3%. Theo đó, khi không pha tạp Sn thì đỉnh (002) có cường độ lớn nhất. Điều này thể hiện mẫu có sự định hướng mạnh theo trục  $c$ . Khi pha tạp 1% Sn thì cường độ đỉnh (002) vẫn có giá trị lớn nhất và các đỉnh còn lại có giá trị cường độ tăng. Khi nồng độ Sn tăng lên 2% và 3% thì cường độ các đỉnh nhiễu xạ tăng mạnh.

Khả năng quang xúc tác của cấu trúc p-Si/n-ZnO/n-ZnO:Sn thanh nano được đánh giá bằng việc phân hủy thuốc nhuộm RhB dưới ánh sáng đèn thủy ngân. Trong quá trình đánh giá khả năng phân hủy RhB, sự giảm nồng độ RhB được xác định bởi cường độ đỉnh hấp thụ RhB tại bước sóng 554nm (Hình 3a) trình bày sự suy giảm nồng độ RhB theo thời gian chiếu sáng của các mẫu p-Si/n-ZnO/n-ZnO:Sn thanh nano với nồng độ pha tạp Sn từ 0 % đến 3% (Hình 3b) cho thấy sự suy giảm nồng độ RhB theo thời gian chiếu sáng của mẫu p-Si/n-ZnO thanh nano.



**Hình 3. a)** Sự thay đổi nồng độ RhB theo thời gian của các mẫu p-Si/n-ZnO/n-ZnO:Sn thanh nano với nồng độ pha tạp Sn từ 0 % đến 3%.

**b)** Sự thay đổi nồng độ RhB theo thời gian của mẫu p-Si/n-ZnO.

$C$  và  $C_0$  trong hình 3a lần lượt là nồng độ RhB sau mỗi khoảng thời gian chiếu sáng và nồng độ RhB ban đầu. Trước khi chiếu sáng, dung dịch RhB được để trong tối khoảng 30 phút. Kể từ khi bắt đầu chiếu tia UV, nồng độ dung dịch RhB giảm theo thời gian. Sau 60 phút chiếu sáng, sự giảm nồng độ RhB của các cấu trúc p-Si/n-ZnO/n-ZnO:Sn (0-3% Sn) thanh nano lần lượt là 68, 80, 78 và 76%. Từ kết quả này, có thể thấy sự giảm nồng độ RhB bởi p-Si/ZnO/n-ZnO:1%Sn thanh nano là cao nhất so với các mẫu khác trong cùng một thời gian. Cấu trúc p-Si/ZnO/n-ZnO:Sn (1-3% Sn) thanh nano thể hiện khả năng hoạt động quang xúc tác cao hơn so với cấu trúc p-Si/ZnO thanh nano (hình 3b).

#### 4. KẾT LUẬN

Chúng tôi đã chế tạo thành công lớp chuyển tiếp dị thể p-Si/n-ZnO/n-ZnO:Sn có cấu trúc thanh nano. Các phép đo quang xúc tác cho thấy khả năng quang xúc tác của các cấu trúc p-Si/n-ZnO/n-ZnO:Sn thanh nano tốt hơn cấu trúc p-Si/n-ZnO. Sự giảm nồng độ RhB bởi p-Si/ZnO/n-ZnO:1%Sn thanh nano là cao nhất so với các mẫu khác trong cùng một thời gian. Cấu trúc p-Si/n-ZnO thanh nano và p-Si/ZnO/n-ZnO:Sn thanh nano khá bền và là chất quang xúc tác có khả năng tái sử dụng cao.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ü. Özgüra, et al. (2005), "A comprehensive review of ZnO materials and devices", *Journal of Applied Physics* **98** p.041301.
2. Bhar, S. and Ananthakrishnan, R. (2005), "Utilization of Ru(ii)-complex immobilized ZnO hybrid in presence of Pt(ii) co-catalyst for photocatalytic reduction of 4-nitrophenol under visible light", *RSC Advances*. **5**, p.20704.
3. Ghosh, A. and Mondal, A. (2005), "Fabrication of stable, efficient and recyclable p-CuO/n-ZnO thin film heterojunction for visible light driven photocatalytic degradation of organic dyes", Vol. 164.
4. Lu, J., et al. (2016), "Synthesis and properties of Au/ZnO nanorods as a plasmonic photocatalyst", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. **78**, p.41.
5. Pruna, A., Pullini, D., and Busquets, D. (2015), "Effect of AZO film as seeding substrate on the electrodeposition and properties of Al-doped ZnO nanorod arrays", *Ceramics International*. **41**, p.14492.
6. Eskandari, M., Ahmadi, V., and Ahmadi, S.H. (2010), "Growth of Al-doped ZnO nanorod arrays on the substrate at low temperature", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. **42**, p.1683.
7. Acharya, A.D., et al. (2012), "Growth and characterization of nano-structured Sn doped ZnO", *Journal of Molecular Structure*. **1022**, p.8.

**INVESTIGATION OF PHOTOCATALYTIC  
ACTIVITY OF p-Si/n-ZnO/n-ZnO:Sn PREPARED  
BY THE HYDROTHERMAL METHOD**

**Abstract:** ZnO doped Sn has been synthesized in order to improve the efficiency of the photocatalysis of ZnO. As  $\text{Sn}^{4+}$  ions replaced the  $\text{Zn}^{2+}$  site, there will be two additional free electrons, thus conducting electricity better. Because the difference in ionic radius of  $\text{Sn}^{4+}$  (0.071 nm) and  $\text{Zn}^{2+}$  (0.074 nm) is very small,  $\text{Sn}^{4+}$  ions can be easily integrated into the ZnO crystal lattices. Therefore, ZnO doped Sn can enhance electricity conducting as well as catalysis. Photocatalytic results showed that when the doped Sn at concentrations between 0% and 3%, the reduction in RhB concentration by p-Si/n-ZnO/n-ZnO:1% Sn nanorods was the highest compared to other samples in the same period of time. The p-Si /n-ZnO /n-ZnO: Sn (1-3% Sn) nanorods show higher photocatalytic activity than the p-Si /n-ZnO nanorods.

**Keywords:** ZnO doped Sn, the p-Si /n-ZnO /n-ZnO: Sn nanorods, p-Si /n-ZnO nanorods.



# ĐÁNH GIÁ VÀ THỬ NGHIỆM THUẬT TOÁN LẮP RÁP DỮ LIỆU HỆ GEN TRONG TIN SINH HỌC

Nguyễn Văn Long  
Trường Đại học Tây Bắc

**Tóm tắt:** Trong bài báo này, tác giả trình bày các kết quả thu được trong quá trình lắp ráp hệ gen từ thực nghiệm với dữ liệu giả lập và dữ liệu thực tế. Đồng thời tiến hành đánh giá, so sánh trên cơ sở các thông số được tạo bởi thuật toán DASR với phần mềm lắp ráp thông dụng hiện nay là Velvet và SPAdes.

**Từ khóa:** Bộ gen, kết cấu, DASR.

Nhận bài ngày 10.6.2017; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 10.9.2017  
Liên hệ tác giả: Nguyễn Văn Long; Email: thanhlong868@gmail.com

## 1. MỞ ĐẦU

Trong bài báo này, với mục đích đánh kết quả lắp ráp của phần mềm DASR, tác giả thực hiện lắp ráp hệ gen bằng dữ liệu giả lập và dữ liệu giải trình tự NGS (Next Generation Sequencing) [1] với nhiều k-mer khác nhau. Dữ liệu giải trình tự thực tế được cung cấp bởi phòng Tin Sinh học, Viện Công nghệ Sinh học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Ngoài ra, để kiểm chứng rõ hơn hiệu quả lắp ráp của DASR, tác giả tiến hành so sánh kết quả lắp ráp của DASR với hai phần mềm Velvet [2] và SPAdes [3], hai trong số những phần mềm được sử dụng phổ biến nhất trong các nghiên cứu về lắp ráp hệ gen. Quy trình so sánh được thực hiện như sau: Từ kết quả lắp ráp dữ liệu thực tế với nhiều k-mer khác nhau, tác giả lựa chọn thông số kmer tối ưu dựa trên các thông số kích thước hệ gen, số lượng contig, contig lớn nhất, chỉ số N50 và số lượng trình tự sử dụng cũng như là chất lượng mapping. Sau khi có được k-mer tối ưu, hai phần mềm Velvet và SPAdes được sử dụng để lắp ráp hệ gen với k-mer tối ưu đã chọn. Cuối cùng là thống kê và so sánh kết quả lắp ráp của hai phần mềm với DASR

## 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

### 2.1. Dữ liệu giả lập (simulated)

#### 2.1.1. Thông tin dữ liệu

Dữ liệu được giả lập dựa trên 1 hệ gen tham chiếu có kích thước hệ gen là 3.860 MB và tỷ lệ GC là 38,94% (được cung cấp bởi Tin sinh học) bằng phần mềm wgsim () với điểm chất lượng 30, độ dài đoạn trình tự là 150bp, kích thước đoạn chèn (insert size) là 250. Thông tin chi tiết về dữ liệu giả lập được trình bày chi tiết ở Bảng 1.

**Bảng 1.** Thông tin dữ liệu giả lập

Dữ liệu giả lập	Số đoạn trình tự	Độ dài (nt)	Tỷ lệ GC (%)
simulated_1.fastq	3.999.641	150	39
simulated_2.fastq	3.999.641	150	39

#### 2.1.2. Kết quả lắp ráp

Quy trình lắp ráp được thực hiện với nhiều k-mer khác nhau từ 31 đến 91, các thông số của các bản lắp ráp được thông kê sử dụng phần mềm QUAST (Quality Assessment Tool) [4]. Dựa vào các thông số như tổng kích thước hệ gen lắp ráp, số lượng contig thu được, chỉ số N50, tỷ lệ % GC và số lượng đoạn trình tự được sử dụng trong quá trình lắp để lựa chọn ra bản lắp ráp có chất lượng tốt nhất. Trong nghiên cứu này chúng tôi sử dụng các tiêu chí như sau:

- Kích thước hệ gen càng gần với kích thước hệ gen tham chiếu thì càng tốt (trong thử nghiệm này kích thước hệ gen tham chiếu là 3.86 MB)
- Số lượng contig thu được càng ít thì càng tốt.
- Độ dài contig thu được càng lớn càng tốt.
- Chỉ số N50, N75 càng lớn càng tốt.
- Tỷ lệ % GC càng gần với hệ gen tham chiếu càng tốt (38,94%).
- Số lượng đoạn trình tự ánh xạ ngược lại (remapping) hay số lượng đoạn trình tự được sử dụng để lắp ráp hệ gen càng nhiều càng tốt.

Dựa vào những tiêu chí trên và thống kê số liệu kết quả lắp ráp ở Bảng 2, chúng tôi nhận thấy rằng hệ gen lắp ráp với K61 cho kết quả lắp ráp tốt nhất với kích thước hệ gen lắp ráp thu được là khoảng 3,91 MB, contig dài nhất là 88.125 bp, tỷ lệ % GC là 38,94%. Các con số này khá tương đồng với các hệ gen lắp ráp K71, K81, K91 và hệ gen tham chiếu. Tuy nhiên, ở K61 có chỉ N50 lớn hơn tất cả các hệ gen lắp ráp còn lại. Chính vì lý do đó, chúng tôi kết luận rằng đối với dữ liệu giả lập trong thí nghiệm này, k-mer 61 là k-mer tối ưu nhất (Bảng 2).

**Bảng 2.** Kết quả lắp ráp sử dụng dữ liệu giả lập với nhiều *k*-mer khác nhau

Indexes	K31	K41	K51	K61	K71	K81	K91
# contigs (...)	86	1845	1131	309	346	368	354
# contigs (>= 0 bp)	124634	46391	4106	853	980	1038	1003
# contigs (>= 1000 bp)	0	200	940	283	317	335	330
Largest contig	936	2839	26504	88125	88135	77254	71767
Total length	51346	1333516	3788940	3843125	3840890	3839968	3840321
Total length (>= 0 bp)	8948961	6356872	4128450	3918503	3943695	3965329	3975087
Total length (>= 1000 bp)	0	241445	3648534	3824448	3819685	3815350	3822812
N50	562	713	4894	22339	19733	19156	19153
N75	529	592	2816	12397	10344	9268	9429
L50	38	715	238	52	54	56	56
L75	62	1230	491	108	118	129	126
GC (%)	39.13	38.91	38.92	38.94	38.94	38.94	38.94

Tuy nhiên, để đánh giá rõ hơn về hiệu quả lắp ráp của phần mềm DASR cần phải có những áp dụng vào dữ liệu thực tế. Do vậy, trong thử nghiệm tiếp theo, tác giả tiến hành thực hiện lắp ráp hệ gen sử dụng dữ liệu giải trình tự NGS [1] của chính hệ gen tham chiếu đã được sử dụng để tạo dữ liệu giả lập. Kết quả chi tiết được trình bày ở phần 2.2.

## 2.2. Dữ liệu thực tế

Nhằm đánh giá rõ hơn hiệu quả lắp ráp của phần mềm DASR, chúng tôi sử dụng dữ liệu giải trình tự thực tế của chính hệ gen tham chiếu đã sử dụng để xây dựng bộ dữ liệu giả lập (đã trình bày ở phần trên). Quy trình lắp ráp bao gồm 3 bước chính: *đánh giá và tinh sạch dữ liệu; lắp ráp với k-mer khác nhau; thống kê kết quả.*

### 2.2.1. Đánh giá và tinh sạch dữ liệu

Dữ liệu đầu vào là trình tự short paired tự bao gồm 2 file định dạng FastQ frag\_1.fastq và frag\_2.fastq. Được giải trình tự bằng máy giải trình tự thế hệ mới Sanger / Illumina 1.9 (nguồn dữ liệu Viện Công nghệ Sinh học, Viện Hàn lâm KH&CN Việt Nam).

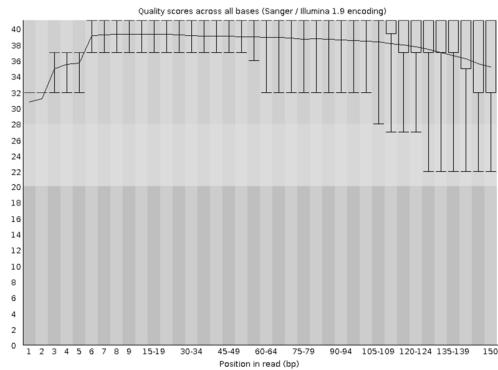
Để có thể đánh giá chất lượng và tinh sạch dữ liệu giải trình tự, chúng tôi sử dụng công cụ phần mềm FastQC và Trimmomatic [5]. Chúng tôi tiến hành loại bỏ các đoạn trình tự có độ dài dưới 101 bp và có chất lượng nhỏ hơn 30 ( $QC < 30$ ).

**Bảng 3. Kết quả đánh giá và tinh sạch dữ liệu**

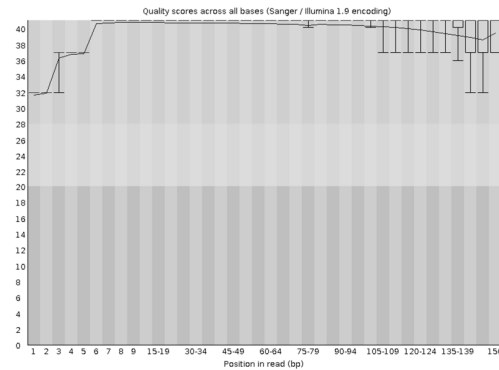
Dữ liệu thực tế	Trước tinh sạch			Sau tinh sạch		
	# trình tự	độ dài (bp)	% GC	# trình tự	độ dài (bp)	% GC
frag_1	5.298.304	150	39	4.074.440	101-150	39
frag_2	5.298.304	150	39	4.074.440	101-150	39

Kết quả đánh giá dữ liệu cho thấy, mỗi file (frag) bao gồm hơn 5 triệu trình tự với độ dài là 150 bp và tỷ lệ phần trăm GC là 39%. Sau quá trình tinh sạch, hơn 1 triệu trình tự đã được loại bỏ, điều này có nghĩa là có khoảng hơn 4 triệu trình tự có chất lượng tốt để thực hiện các bước phân tích tiếp theo (Bảng 3). Dưới đây là một số hình ảnh đánh giá dữ liệu trước và sau tinh sạch theo các tiêu chí khác nhau được thực hiện bởi phần mềm

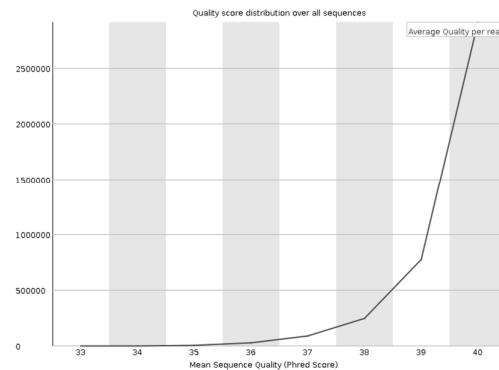
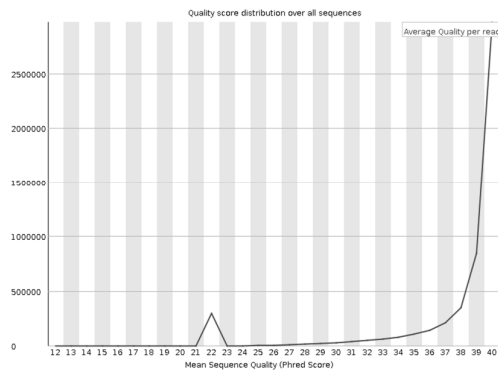
#### Trước tinh sạch



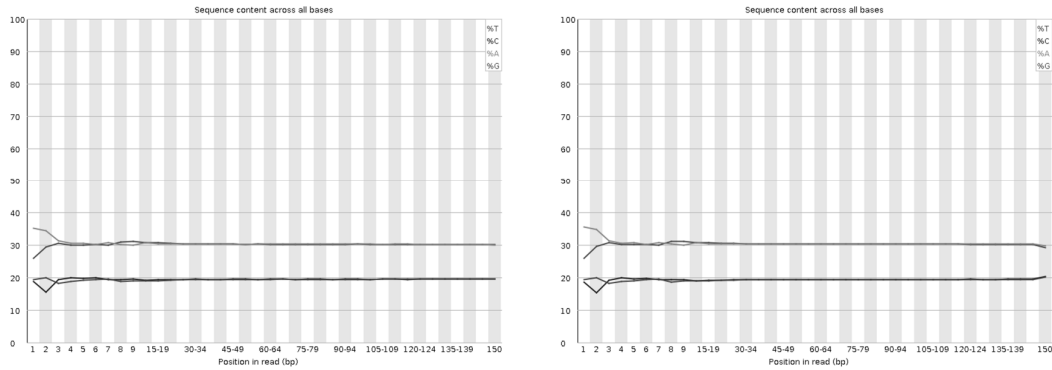
#### Sau tinh sạch



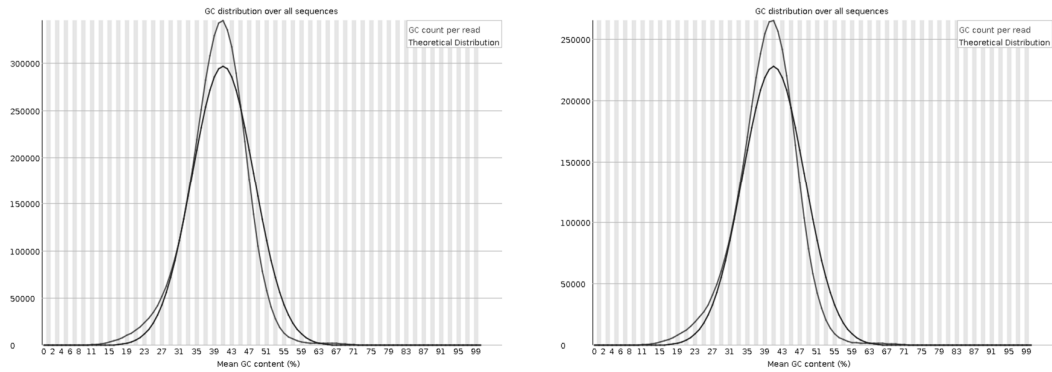
#### A. Chất lượng theo vị trí base



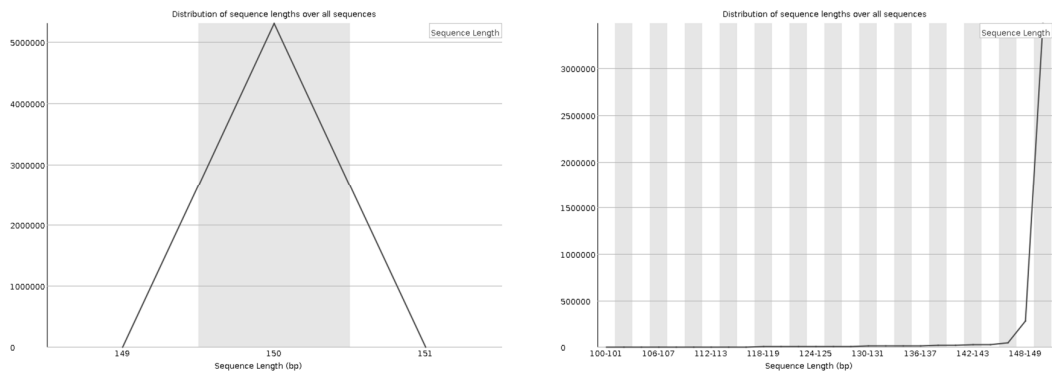
#### B. Điểm trung bình chất lượng theo đoạn trình tự



C. Tỷ lệ A, T, C và G trong dữ liệu



D. Tỷ lệ %GC



E. Phân bố độ dài của các đoạn trình tự

**Hình 1.** Một số hình ảnh so sánh kết quả chất lượng giải trình tự trước và sau tinh sạch.

Nhìn vào kết quả tinh sạch cho thấy, chất lượng theo vị trí base điểm chất lượng (QC) của một trình tự thể hiện mức độ tin cậy của trình tự đó, loại bỏ các trình tự QC < 30

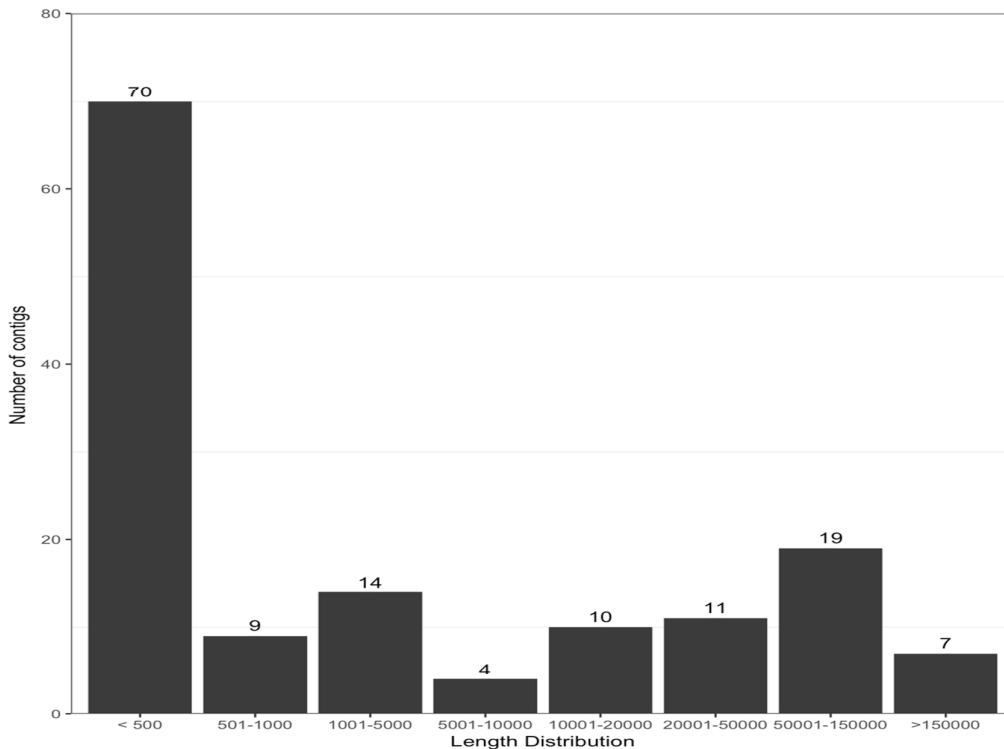
(Hình 1 A). Chất lượng theo vị trí base điểm chất lượng (QC) của một trình tự thể hiện mức độ tin cậy của trình tự đó, loại bỏ các trình tự QC<30 (Hình 1 B). Hình 1 C cho chúng ta biết tỉ lệ phần trăm (%) của 4 loại A, T, G, C có trong dữ liệu nhìn biểu đồ ta thấy tỉ lệ %G ~ %C và % A ~ % T. Thống kê % GC ở mỗi đoạn trình tự và đường này sẽ được so sánh với một đường màu xanh lý thuyết nếu dữ liệu có tỉ lệ % GC càng gần đường lý thuyết thì càng tốt (Hình 1 D). Biểu đồ thống kê phân bố độ dài của các đoạn trình tự trong dữ liệu từ hình dưới cho thấy tất cả các đoạn trình tự có độ dài 150 bp, sau quá trình tinh sạch, tất cả trình tự có độ dài nhỏ hơn 101 bp đã được loại bỏ (Hình 1 E).

**Bảng 4. Kết quả lắp ráp với nhiều k-mer khác nhau**

Indexes	K31	K41	K51	K61	K71	K81	K91
# contigs	2444	886	175	132	104	80	74
# contigs (>= 0 bp)	78145	3845	664	418	288	200	144
# contigs (>= 1000 bp)	1376	728	149	115	91	70	65
Largest contig	7991	37295	153972	178182	178208	341148	508539
Total length	3386688	3799516	3848787	3849914	3850822	3853499	3853739
Total length (>= 0 bp)	10963636	4107501	3918189	3892805	3880074	3874722	3867331
Total length (>= 1000 bp)	2612555	3682432	3830919	3838018	3841963	3846289	3847387
N50	1656	6812	44982	54945	88156	128011	128117
N75	1051	3892	24124	32839	44234	62408	64050
L50	663	173	24	20	15	11	8
L75	1306	356	53	42	31	22	19
GC (%)	38.91	38.91	38.92	38.92	38.93	38.94	38.93
# remapping reads (%)	7,024,967 (86.21%)	7,743,376 (95.02%)	8,018,083 (98.39%)	8,038,811 (98.65%)	8,051,215 (98.8%)	8,059,907 (98.91%)	8,002,825 (98.21%)
Mapping quality	2.5	15.6	28.76	28.76	34.33	36.48	38.31

### 2.2.2. Kết quả lắp ráp

Với dữ liệu đầu vào là các file có định dạng FastQ đã được tinh sạch gồm 2 tập là clean\_1.fastq và clean\_2.fastq. Tác giả tiến hành chọn thông số k-mer để tiến hành xây dựng đồ thị De brujin, quá trình dựng đồ thị được tiến hành việc xóa bỏ các cạnh bắc cầu và các lỗi Tip và bubble. Với một lượng lớn các đoạn read sẽ dẫn đến hình thành đồ thị với hàng triệu đỉnh và cạnh chồng chéo lên nhau và có thể xuất hiện khá nhiều đỉnh mà không có cạnh nối giữa chúng cũng như mất rất nhiều thời gian cho bước xếp chồng lên nhau để có thể xử lý được cần thiết cài đặt thuật toán trên hệ thống máy điện toán cực mạnh có khả năng dò tìm và lắp ráp đúng vị trí các đoạn trình tự trên phân tử ADN.



**Hình 2.** Phân bố độ dài contig của hệ gen lắp ráp K91.

Dựa vào những tiêu chí đánh giá chất lượng lắp ráp đã được trình bày ở phần 2.1.2, kết quả lắp ráp dữ liệu giải trình tự cho thấy bản lắp ráp với k-mer 91 cho kết quả tốt nhất với kích thước hệ gen thu được là 3.867.331 bp, tổng số contig thu được là 144, độ dài contig lớn nhất là 508.539 bp, tỷ lệ phần trăm GC là 38.94%, tổng số lượng đoạn trình tự sử dụng trong quá trình lắp ráp là 8.002.825 (98,21%) và chất lượng mapping là 38,31, đây là điểm chất lượng cho mức độ tin cậy cao. Nhìn vào kết quả phân bố độ dài contig của hệ

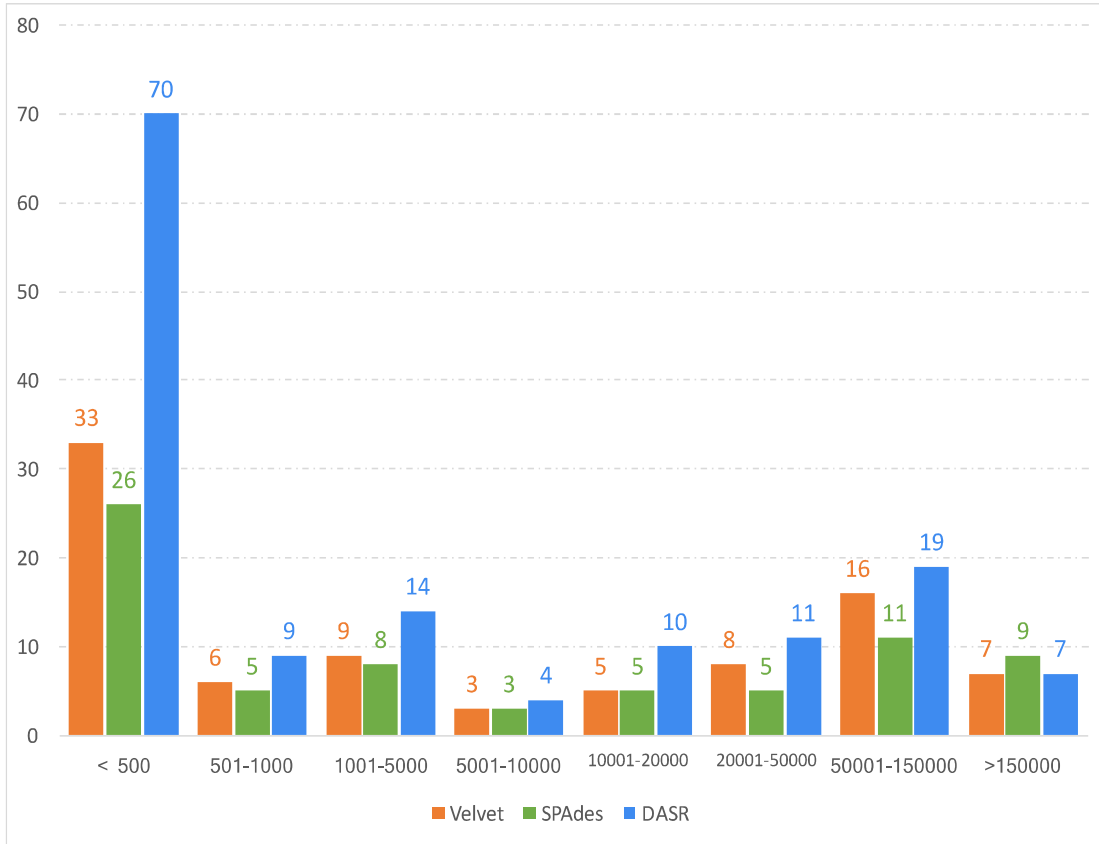
gen lắp ráp K91 (Hình 2) cho thấy có 70 contig có kích thước nhỏ hơn 500 bp, tuy nhiên chỉ chiếm 13592 bp (0,3%) tổng kích thước hệ gen. Đặc biệt, số lượng contigs ở có kích thước từ 5000-150000 bp và lớn hơn 150000 bp theo lần lượt là 11 và 7 contig, tuy nhiên số tổng kích thước của hai nhóm này là 1.467.468 bp và 1.826.822 bp chiếm phần lớn tổng kích thước hệ gen. Điều này cho thấy kết quả lắp ráp của phần mềm DASR tương đối tốt và đáng tin cậy.

Để so sánh sâu hơn về lượng lắp ráp của DASR so với các phần mềm lắp ráp được sử dụng phổ biến, tác giả đã thực hiện so sánh chất lượng lắp ráp giữa phần mềm DASR với hai phần mềm được sử dụng phổ biến hiện nay trong các nghiên cứu về lắp ráp hệ gen là Velvet và SPAdes. Để đảm bảo tính nhất quán trong phép so sánh, hai phần mềm này được sử dụng để lắp ráp hệ gen sử dụng dữ liệu giải trình tự thực tế và với k-mer 91 và so sánh với kết quả lắp ráp của DASR ở k-mer 91.

**Bảng 5.** Thống kê kết quả lắp ráp của 3 phần mềm với k-mer 91

Indexes	DASR	SPAdes	Velvet
# contigs ( $\geq 0$ bp)	144	72	87
# contigs ( $\geq 500$ bp)	74	46	54
# contigs ( $\geq 1000$ bp)	65	41	48
Largest contig	508539	742974	678792
Total length	3853739	3863761	3860424
Total length ( $\geq 0$ bp)	3867331	3865750	3865086
Total length ( $\geq 1000$ bp)	3847387	3860045	3855831
N50	128117	192409	151612
N75	64050	100738	84186
L50	8	6	7
L75	19	12	16
GC (%)	38.93	38.94	38.94
Remapping reads (%)	8,002,825 (98.21%)	8,066,047 (98.98%)	
Mapping quality	38,31	41,12	





Hình 3. Biểu đồ so sánh phân bố độ dài contig giữa 3 phần mềm.

### 3. KẾT LUẬN

Nhìn vào bảng thống kê cho thấy, kết quả lắp ráp của cả ba phần mềm khá tương đương nhau và khá tương đồng với hệ gen tham chiếu: với kích thước hệ gen tổng số khoảng 3,86 Mb, tỷ lệ % GC khoảng 38,94% và số lượng đoạn trình tự ánh xạ ngược lại (remapping reads) chiếm khoảng trên 98%. Tuy nhiên, khi so sánh về số lượng contig; kích thước contig dài nhất và chỉ số N50 thì phần mềm SPAdes cho kết quả tốt hơn trong 3 phần mềm; với tổng số contigs thu được là 72 contig; kích thước contig dài nhất là 742974 bp và chỉ số N50 là 192409 bp. Hai phần mềm còn lại (DASR và Velvet) cho kết quả khá tương đồng nhau. Từ kết quả trên có thể thấy rằng phần mềm DASR cho chất lượng lắp ráp khá tương đồng với phần mềm Velvet và có phần kém hơn so với phần mềm SPAdes. Số lượng contig ngắn tạo ra vẫn còn nhiều hơn so với hai phần mềm còn lại (Hình 3). Đây là những bước đầu phát triển, do đó phần mềm DASR cần phải được thử nghiệm trên nhiều bộ dữ liệu khác nhau nhằm tối ưu hiệu suất cũng như là chất lượng lắp ráp của phần mềm.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Xiong, M., Zhao, Z., Arnold, J. and Yu, F. (2011), "Next-generation sequencing", *Journal of BioMed Research*.
2. Zerbino, Daniel R., and Ewan Birney (2008),"Velvet: algorithms for de novo short read assembly using de Bruijn graphs", *Genome research* 18.5, pp.821-829.
3. Bankevich, Anton, et al. (2012), "SPAdes: a new genome assembly algorithm and its applications to single-cell sequencing", *Journal of computational biology* 19.5, pp.455-477.
4. Gurevich, Alexey, et al (2013), "QUAST: quality assessment tool for genome assemblies", *Bioinformatics* 29.8 pp.1072-1075.
5. Anthony M. Bolger, Marc Lohsel and Bjoern Usadel (2014), Trimmomatic: a flexible trimmer for Illumina sequence data, *Bioinformatics*.

## EVALUATING AND EXPERIMENT THE ALGORITHM TO ASSEMBLE DATA GENOME IN BIOINFOMATICS

**Abstract:** *In this paper, the author present the results gained in the experiment process to assemble genome with the suppose data and reality dagta. Simultaneous evaluating and comparing rely on the parameters created by DASR algorithm and Velvet, SPAdes usual assemble software.*

**Keywords:** *Genome, assembly, DASR.*

## AN APPROACH FOR SPECIFICATION AND VERIFICATION OF MULTI-AGENT SYSTEMS

Tran Thi Thu Phuong

Hanoi Metropolitan University

**Abstract:** Multi-agent systems (MASs) have been recognized as a modern approach for software development where each of software components is independent and autonomous like agent. However, how to ensure the correctness of their designs before implementing is still an open and interesting problem. The objectives of this paper are proposing a method for specifying and verifying multi-agent systems in order to solve the described issue. In the method, the number of agents of the considering MAS is infinite. As a result, the state spaces of these systems are also infinite.

**Keywords:** specification, verification, multi-agent systems, theorem proving, invariant properties, CafeOBJ.

Email: ttphuong2@daihocthudo.edu.vn

Received 14 July 2017

Accepted for publication 10 September 2017

### 1. INTRODUCTION

Computer agents have been known as key elements of modern systems in which the actions of each agent are autonomous in the environment to achieve system's goals [1]. Although one agent can perform independently, in some systems, agents must interact with each other. Similar like sharing resources between agents, it requires the agents synchronizing their activities in using the resources. Thus, a multi-agent system [2], [3] has been recognized as a set of agents which are modeled behavior of human and can interact with each other to meet some objects. As a result, MAS is being interested in setting research and widely applied [4], [5], [6], [7]. In software engineering, MAS has been seen as a modern approach to software development where each of software components is independent and autonomous like agent. In the life cycle of software development, there are many important phases such as requirements, specification (analysis), design, implementation, integration, maintenance and retirement [8]. However, one of the issues of the life cycle is how to ensure the correctness of the MAS design of MAS before implementing. This is still an open and interesting problem.

A potential solution for dealing with the described problem is applying model checking [9], [10]. According to the model checking approach, a model that describes behaviors of the system and a required property are given into a model checker for verifying correctness of the design of the system. The model is represented by finite state machine, finite state automaton, etc. However, the number of states of this model is finite whereas behaviors of MAS are often infinite. Moreover, the number of agents in MAS is often changed during the system development process. Thus, we do not know exactly the number of agents. In this case, we consider the number of agents is infinite. As a result, the state space of the system is infinite and we cannot apply model checking to verify the correctness of MAS.

This paper proposes a method for the specification and verification of MAS in order to solve the above issue. In the proposed method, actions of agents and invariant properties are specified using the algebraic language. Based on these specifications, the state space of MAS is defined recursively that comprise with an initial state and how to go to the next states from any state of the system. We realize the proposed method by using a theorem prover named CafeOBJ [11], [12], [13].

## 2. BACKGROUND

### 2.1. An Overview of Multi-agent Systems

Multi-agent system has been known as a set of agents. There are many definitions of agent and one of the most comprehensive definitions is given by Michael Wooldridge in [14]. The definition is adapted from Wooldridge and Jennings (1995).

*“An agent is a computer system that is situated in some environment, and that is capable of autonomous action in this environment in order to meet its design objectives”.*

According to this definition, an agent can be either software system or hardware system. Any agent exists in a certain environment and operates independently on behalf of its owner or user to satisfy the design objectives.

An important feature of agents is autonomy. The autonomy is the ability of agents can perform actions without the intervention of people or other agents. As this feature, agents can exist and act on behalf of its owner in the environment to obtain some goals. Related to this feature, an intelligent agent also has other features as follows:

+ *Reactivity*: Agent has ability to maintain interaction with the environment and respond in time to changes that occur in the environment.

+ *Proactiveness*: Agent has ability to actively seek action towards the assigned objectives.

+ *Social ability*: An agent is capable of interacting with other agents to achieve shared goals.

Although one agent can perform actions independently, in some systems, agents must interact with each other to obtain some goals. For example, in the internet environment, a computer (as an agent) has to interact with each other to use sharing resource. In [14], Michael Wooldridge also defined multi-agent system as:

*“A multi-agent system is one that consists of a number of agents, which interact with one-another”.*

## 2.2. Theorem Proving

Theorem proving is a verified method that the verification is performed on formal specifications of system models. The method consists of many precise rules, initial positions and goals. From the initial position, the method uses the rules and applies inference or deduction steps to reach the goal. A step of inference or deduction and positions are sets of formulae. The initial position is called axioms, assumptions or hypotheses. In the logical system, goals and axioms are stated by sentences (formulae) then add some rules of deduction for obtaining new sentences from old ones. In this context, models relate to rules and satisfaction means that a sentence describes accurately a given position. Because the method does not need checking all states of the system and therefore, it is applied to verify the systems which the state spaces are no limited. As a result, it is also an accurate method to verify the multi-agent systems which number of agents is infinite. However, in some cases, if we cannot complete the proof of a goal, theorem proving cannot tell us whether the goal is not indeed satisfied or whether we do not provide enough information to complete the proof.

## 2.3. Fundamentals of CafeOBJ

CafeOBJ is an algebraic specification language that was developed under the direction of Kokichi Futatsugi at Japan Advance Institute of Science and Technology (JAIST). This language inherits directly OBJ algebraic specification language [15], [16] and implements rewriting logic and hidden algebra. It also supports the verified method based on algebraic specification technique and induction method for verifying the system that has infinite states.

*Specification in CafeOBJ is module. A module has the following declaration:*

```
Module <module_name>
{
    <module_element>*
}
```

In the declaration of module, `module_name` is the name of the module, `module_element` is either import declaration, sort declaration, operator declaration, record declaration, variable declaration, equation declaration, or transition declaration.

CafeOBJ module can be classified into tight module and loose module that are declared as `mod!` and `mod*` respectively. Tight modules are used when describing data types and loose modules are used when describing the parameters, behaviors of systems. After specified, the file is saved as `.mod` extension.

Behavioural specifications [17], [18] are based on hidden algebra and they can naturally handle states of encapsulated objects. The state space of an object is shown as a hidden sort. It is considered as a kind of black box and the state of any object can be observed by using some operators called attributes. In hidden algebra, there are two kinds of sorts, *visible sorts* represent abstract data types and *hidden sorts* represent states of an object. The declaration of sorts is presented as follows [19]:

```
sort declaration = hidden sort | visible sort
visible sort = [list_of_sort_names{< list of sort names}*]
hidden sort = "*" [list_of_sort_names{< list of sort names}*] "*"
```

In CafeOBJ, operation declaration is presented as follows [19]:

```
operator declaration = op operator_name: list of sort names -> sort_name
op = op | bop
```

An example of the behavioural specification is presented as bellows [20]:

```
mod* COUNTER {
  protecting(INT)
  *[ Counter ]*
  op init: -> Counter – initial state
  bop add: Int Counter -> Counter
  bop read_: Counter -> Int
  var I: Int
  var C: Counter
  eq read init = 0.
  eq read add(I, C) = I + read C.
}
```

The example specifies loose module COUNTER. INT is imported in the specification by protecting (INT). Hidden sort Counter is declared within `*[]*`. The init operator denotes any initial state while add action adds an integer to the Counter and read returns value of a Counter. I and C are variants and declared by var. In order to define read operator and add operator, eq is used. In this definition, the value of the initial state init is 0 and the value of operator add (I,C) is sum of I and value of C.

### 3. RELATED WORKS

In this section we focus on reviewing some existing works on specification and verification of multi-agent systems. The reviewing is presented on the most recent and closest ones.

An early of works on specification and verification was by Wooldridge *et al.* in [21]. It presented a language for design and automatic verification of multi-agent systems (MABLE). A MABLE system consists of a number of agents. Each of agents is programmed using MABLE imperative programming language and has a mental state (beliefs, desires and intentions). In MABLE system, an agent is implemented as a process in PROMELA [22], claims about the behavior of agents are expressed in MORA, a simplified form of Wooldridge's LORA, and checked by the SPIN model checking system.

In [23], Rafael H. Bordini and colleagues introduced a framework for verification of multi-agent programs in an agent-oriented programming language is AgentSpeak (F) which is a finite state version of AgentSpeak (L). The verification of agent programs is done by transforming AgentSpeak(F) code into either Promela or Java, then applying associated Spin and JPF model checkers to verify.

More recently, in [24] Louise A. Dennis and colleagues provided a new framework for verifying a wide range of agent-based programs. According to this approach, agents are programmed in several programming languages (AgentSpeak, 3APL, Jadex, MetateM...) is translated to AIL (Agent Infrastructure Layer) then Java. The verification uses AJPF which is improved version of the open source Java model checker JPF.

So far, all of the work presented in this section concentrates verification using model checking. In complex systems where contain abstract data types or recursive definitions, model checking is not an appropriate verification approach. Moreover, if the state space of the system is infinite, model checking cannot be used to verify the system. Therefore, there is also some work that uses theorem proving as a key solution for these cases. N. Alechina *et al.* proposed a method for verifying the properties of agent programs in [25]. The agent was specified with beliefs, goals and plans by SimpleAPL such as 3APL and 2APL. In order to verify the correctness properties, the agent programs written by SimpleAPL are translated into an expression of the logic. Based on these works, PDL theorem prover is used for proving the safety properties and liveness properties. However, this approach is applied to single agent while in multi-agent systems, agents must interact with other agents to obtain the system goals. Therefore, multi-agent system needs to be specified and verified in the interactions between agents not only focus on a single agent.

In the paper, we propose a method for the specification and verification of multi-agent systems which number of agents are infinite. CafeOBJ is used as a tool for specifying agent's actions and state space of the system. Theorem prover named CafeOBJ is also used to verify invariant properties of the system.

#### 4. THE PROPOSED METHOD

In multi-agent systems, actions of each agent are autonomous. However, in some cases, the objectives of the system are only obtained by the interaction of agents; for example, the sharing resource in the system requires each agent must interact with others. In order to verify the combination of agent can obtain the system goals or not, we need to specify behaviors system by specifying the behaviors of agents. In this section, we propose the method to resolve the issues. Firstly, we present the method for specifying agents through specifying actions of agents. Next, the specification of MAS by specifying the state space of MAS will be described. In section 4.3, the invariant properties which are popular properties of MAS are defined. Finally, we propose a method to check whether the MAS satisfy the invariant properties or not in section 4.4.

##### 4.1. Specification of Agents

In MAS, an agent can be either acknowledged as an independent object that has an inference mechanism or it can be a member of a system that requires each agent must interact with others to obtain the system goals. In general level, the agent receives information from the environment and information from other agents through its sensor. In order to interact with other agents and the environment, an agent selects one of its actions. Which action should be selected depends on information about the environment and the current state of the system.

Let  $Aid$  be a set of indexes of agents and  $Sys$  be the state space of MAS. Each agent  $a_i$  has a finite set of  $n$  actions such as  $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} \dots a_{in}$ . The specification of agents is performed by specification of its actions. Each action  $a_{ij}$  is defined as follows.

**Definition 1.** (Agent's action). An action  $a_{ij}$  is defined as a function which maps  $Aid \times Sys$  to  $Sys$  (i.e.,  $a_{ij}: Aid \times Sys \rightarrow Sys$ ).

**Note 1.** We use  $a_{ij}(i, s)$  where  $i \in Aid, s \in Sys$  to denote that the agent  $a_i$  performs the action  $a_{ij}$  at the state  $s$  of system. The impact of this action can make the system go to the next state  $s' = a_{ij}(i, s)$  or remain the current state  $s$ .



In order to know whenever the action can be performed or not and therefore, the system will go to another state or not, we define function  $c_{-a_{ij}}$  as follows:

**Definition 2.** (Condition of agent's action). A condition of agent's action  $c_{-a_{ij}}$  is defined as a function which maps  $Aid \times Sys$  to  $\{true, false\}$  (i.e.,  $c_{-a_{ij}}: Aid \times Sys \rightarrow \{true, false\}$ ).

**Note 2.** We use  $c_{-a_{ij}}(i, s)$  where  $i \in Aid, s \in Sys$  to denote that the agent  $a_i$  performs the action  $a_{ij}$  at the state  $s$  of system successfully or not and therefore, the system will go to the next state  $s'$  or not. If  $c_{-a_{ij}}(i, s) = true$ , action  $a_{ij}(i, s)$  is performed successfully and the system will go to the next state  $s'$ . Otherwise, if  $c_{-a_{ij}}(i, s) = false$ , agent  $a_i$  does not perform action  $a_{ij}$  successfully, the state of system is still  $s$ .

## 4.2. Specification of State Space of MAS

In MAS, number of agents often change during the development process of the system, then we do not know exactly the number of agents in MAS. Thus, in this paper, we consider the state space that is obtained by the impaction of agents' actions is infinite. The state space of MAS is a combination of the initial state and the next states. Let *init* be the initial state and  $s$  be the state of MAS. At each state  $s \in Sys$ , the system will go to the next state  $s' = a_{ij}(i, s)$  if one of agents  $a_i (i \in Aid)$  performs successfully action  $a_{ij}$  at state  $s$ . The state space of MAS can be specified recursively:

$$Sys = \{init\} \cup \{a_{ij}(i, s) \mid i \in Aid, s \in Sys, j \in [1.. n]\}$$

## 4.3. Specification of Invariant Properties

A MAS which is developed has to satisfy some required properties. Before a system is deployed, required properties need to be verified. In this paper, we only focus on specification and verification of invariant required properties. These are common properties of systems in general and MASs in particular. An invariant property is defined as follows:

**Definition 3.** (Invariant property). An invariant property  $inv$  is defined as a function which maps  $Sys$  to  $\{true, false\}$  (i.e.,  $inv: Sys \rightarrow \{true, false\}$ ).

**Note 3.** We use  $inv(s) = true$  where  $s \in Sys$  to denote that the system has to satisfy with all states of system. The verification of correctness of invariant property  $inv$  is equivalent to verify that with every state  $s (s \in Sys)$  then  $inv(s) = true$ .

#### 4.4. Verification of Multi-agent Systems

Currently, software testing [26] has been recognized as the most popular solution for detecting errors/mistakes of systems. However, testing has been done after implementing phase in the life cycle of software development then we cannot apply testing for checking the correctness of the design phase. In order to check the correctness of the design phase, formal verification is currently widely applied. In this verification method, model checking and theorem proving are two methods that have been using mostly. Model checking which formally describes behaviors of the system and a required property is given into a model checker for verifying correctness of the design of the system. However, this model is difficult to use for analyzing the programs which contain complex data type like trees, lists, recursive definitions [27]. Moreover, the number of states of the model is finite, then we cannot apply this model for verifying the system that a number of states are infinite. In MAS, the number of agents often changes during the system development process. In general, we can assume that the number of agents is unknown. As a result, we cannot apply model checking to verify the correctness of MAS.

Base on theorem proving described in section 2.2 and induction mathematical idea, we propose a verified method that applied to prove the correctness of MAS that the state space is specified recursively and number of agents is infinite. Suppose that the system has some invariant properties and we have to verify that the system satisfies all invariant properties. Figure 1 presents the proven process for verification of an invariant property of the system. In this figure, the verification of an invariant property has been done by verifying in the base case and induction case. In the base case, we check the property *inv* is satisfied at initial state or not ( $inv(init) = true ?$ ). If true, we move to prove *inv* in the inductive step. Otherwise, if  $inv(init) = false$ , we can conclude that the system does not satisfy with property *inv*. In inductive case, suppose that the system satisfies with property *inv* at state *s*, we must prove that the system also satisfies with property *inv* at all the next states *s'*. The next state *s'* is the state of the system that is obtained by an action of any agent performs successfully its action at state *s*. If property *inv* is satisfied at the next states of *s* then we can conclude that the system satisfies with property *inv*. Otherwise, the system does not satisfy with property *inv*. In the process of verifying invariant properties of MAS, the obtained results are neither true nor false at some next states of the system. And therefore, we cannot know that the system satisfies or not invariant properties. In these cases, we need providing some lemmas to prove that  $inv(s)$  returns true. These lemmas are based on attributes of system that relate to *inv*. Before being applied, these lemmas need to be verified as well as properties of the system.

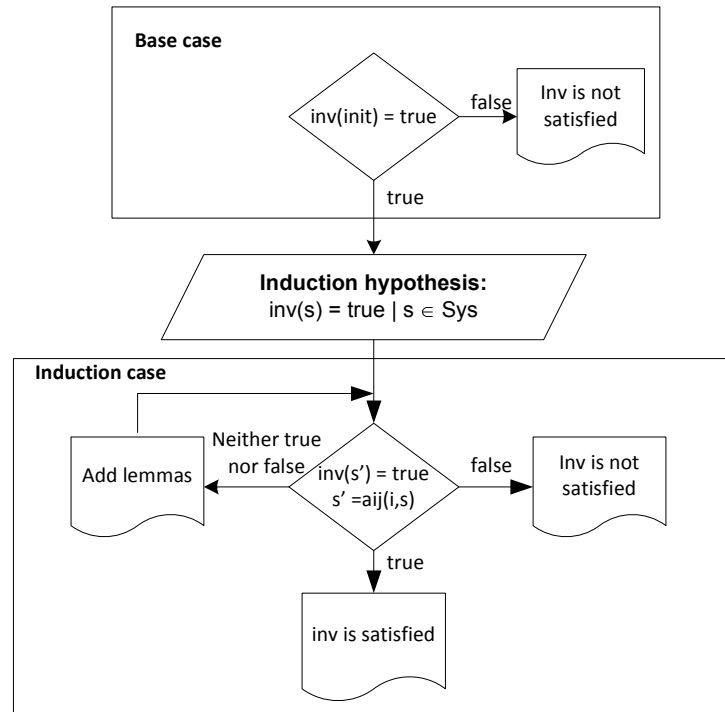


Fig. 1. Verification process of invariant property of MAS.

## 5. CONCLUSION AND FUTURE WORKS

In this paper, we proposed a method for the specification and verification of multi-agent systems which state space is infinite. With this issue, model checking cannot be applied to resolve. In the proposed method, we used algebraic language for specifying behaviors of agents, behaviors of the system and invariant required properties. In the specification of behaviors of agents, actions of agents were specified. In order to know when an agent performs its action successfully, we also defined conditional action function. Based on these specifications, state space of MAS was specified recursively as a combination of initial state and the next states that are obtained when any agent performs successful its actions. Required invariant properties of the system also were defined as the properties that the system has to satisfy at all states of the system. After specifying MAS, we presented the method for verification of the system. The proposed method is a theorem prover named CafeOBJ has been done by checking invariant property is satisfied at initial state and the next states.

As future work, we propose to realize the proposed method by specifying and verifying Airline Ticket Booking system that number of booking agents is unknown. We

also intend to combine model checking and theorem proving for specifying and verifying multi-agent systems. For example, model checking is used for modeling behaviors of booking agents and verifying them. This means that the correctness of the specification of the system will be verified. The invariant required properties of the system will be verified by theorem proving. This combination will provide benefits in term of automation and can be used on large systems. Although invariant properties are common properties of the system in general, several properties are not invariant, then it is necessary to research how to translate the other properties into invariant properties. For example, based on semantics of the properties we will translate the properties into invariant properties. This will increase the applicability of the proposed method.

## REFERENCE

1. Bergenti, F., Gleizes, M.-P., Zambonelli, F., et al (2004), "Methodologies and Software Engineering for Agent Systems". *The agent – Oriented Software Engineering Handbook*: pp.10-22.
2. Bernon, C., Cossentino, M., Gleizes., M.-P., Turci, P., Zambonelli, F. (2004), " A study of some Multi-Agent Meta-Models". *The Fifth International Workshop on Agent-Oriented Software Engineering*: pp.62-77.
3. B. Henderson-Sellers and P. Giorgini, et al. (2005), "Agent-Oriented Methodologies": pp.136-172.
4. Alex L. G. Hayzelden and Rachel A. Bourne. (2001), "Agent Technology for Communication Infrastructures": pp.254-260.
5. K. Sycara (1998), "Multi-agent Systems". *AI Magazine*, 19(2): pp.79-92.
6. G. Weiss (1999), "Multiagent Systems: a Modern Approach to Distributed Artificial Intelligence".pp.259-265.
7. M. Wooldridge (2002), "An Introduction to MultiAgent Systems". pp.13-20.
8. Rajkumar Buyya (2012), "Software Life Cycle and Models" Available from: <http://www.cloudbus.org/~raj/254/Lectures/Lecture2.pdf>.
9. E. M. Clarke (2001), "Model Checking". *Handbook of automated reasoning*: pp.1635 – 1790.
10. J. Kramer and J. Magee (2006), "Concurrency: State Models & Java Programming": pp.6-10.
11. CafeOBJ Home Page (2012), Available from: <http://www.ldl.jaist.ac.jp/cafeobj/>
12. Kokichi Futatsugi, A.T. Nakagawa, and T. Tamai (2000), "CAFE: An Industrial-Strength Algebraic Formal Method": pp.1-10.
13. Razvan Diaconescu and Kokich Futatsugi (1998), "CafeOBJ Report, The language, Proof Techniques, and Methodologies for Object-Oriented Algebraic Specification": pp.1-31.
14. Michael Wooldridge (2012), "An Introduction to Multi-Agent Systems": pp.19-38.
15. K. Futatsugi, J. Goguen, J.-P. Jouannaud, and J. Meseguer (1985), "Principles of OBJ2. Proc. 12th ACM Symposium on Principles of Programming Languages", *ACM*: pp.52–66.
16. K. Futatsugi, J. Goguen, J-P.Jouannaud, J. Meseguer and T. Winkler (2000), "Introducing OBJ": pp.3-167.

17. Joseph Goguen and Răzvan Diaconescu (1994), “Towards an algebraic semantics for the object paradigm”, *Lecture Notes in Computer Science*. Springer: pp.1-34.
18. Joseph Goguen and Grant Malcolm (2012), “A hidden agenda”. Available from: <http://www-cse.ucsd.edu/users/goguen/pubs/index.html>
19. Vishnu Kotrajaras (2003), “Towards an Agent-Searchable Software Component Using CafeOBJ Specification and Semantic Web”, *Satellite Workshop of the FM*: pp.187-210.
20. Shuusaku Iida (2012), “Behavioural specification of a counter using CafeOBJ”, Available from <http://www.1dl.jaist.ac.jp/cafobj/lib/cws.mod>
21. Michael Wooldridge, Michael Fisher, Marc-Philippe Huget, and Simon Parsons (2002), “Model checking multi-agent systems with MABLE”, *ACM*: pp.952–959.
22. Gerard J. Holzmann (2003), “The SPIN Model Checker”: pp.33-72.
23. Rafael H. Bordini, Michael Fisher, Willem Visser, and Michael Wooldridge (2006), “Verifying multi-agent programs by model checking”. *Journal of Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*: pp.239–256.
24. Louise A. Dennis, Berndt Farwer, Rafael H. Bordini, and Michael Fisher (2008), “A flexible framework for verifying agent programs”, *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*: pp.1303–1306.
25. N. Alechina, M. Dastani, F. Khan, B. Logan and J.-J. Ch. Meyer (2010), “Using Theorem Proving to Verify Properties of Agent Programs”. Springer: pp.1-33.
26. Ron Patton (2005), “Software testing”, pp.1-37.
27. Kaufmann, M., Moore, J.S (2004), “Some Key Research Problems in Automated Theorem Proving for Hardware and Software Verification”. *Spanish Royal Academy of Science (RAMSAC)*: pp.181–196.

## PHƯƠNG PHÁP ĐẶC TẢ VÀ KIỂM CHỨNG CÁC HỆ ĐA TÁC TỬ

**Tóm tắt:** Các hệ thống đa tác tử (MASs) đã được công nhận là phương pháp tiếp cận hiện đại cho phát triển phần mềm, trong đó mỗi thành phần phần mềm là độc lập và có tính tự trị như tác tử. Tuy nhiên, làm thế nào để đảm bảo tính chính xác của thiết kế trước khi thi hành vẫn còn là một vấn đề mở và thú vị. Mục tiêu của bài báo này là đề xuất một phương pháp đặc tả và kiểm chứng các hệ thống đa tác tử để giải quyết vấn đề được mô tả. Trong phương pháp này, số lượng tác tử của các hệ MAS là vô hạn và do đó không gian trạng thái của hệ thống cũng vô hạn.

**Từ khóa:** Đặc tả, kiểm chứng, hệ đa tác tử, thuyết chứng minh, các thuộc tính bất biến, CafeOBJ.

# SỰ ẢNH HƯỞNG CỦA NHIỆT ĐỘ TRONG QUÁ TRÌNH THỦY NHIỆT TỚI VIỆC HÌNH THÀNH DÂY NANO $\text{Na}_{0,44}\text{MnO}_2$

Tạ Anh Tấn<sup>1</sup>, Đặng Trần Chiến<sup>2</sup>, Phạm Duy Long<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Trường Đại học Thủ đô Hà Nội

<sup>2</sup> Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội

<sup>3</sup> Viện Khoa học Vật liệu – Viện Hàn lâm Khoa học Việt Nam

**Tóm tắt:** Vật liệu điện cực  $\text{Na}_x\text{MnO}_2$  tổng hợp từ các tiền chất  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  và  $\text{NaOH}$  bằng phương pháp thủy nhiệt (hydrothermal) ở các nhiệt độ 185 °C, 190 °C, 195 °C, 200 °C và 205 °C cho thấy, ngay ở nhiệt độ thủy nhiệt 185 °C đã có sự hình thành của pha vật liệu  $\text{Na}_{0,44}\text{MnO}_2$ . Tuy nhiên phải đến nhiệt độ 205 °C của quá trình thủy nhiệt mới thu được vật liệu  $\text{Na}_{0,44}\text{MnO}_2$  gần như đơn pha. Thực nghiệm cũng cho thấy trong quá trình tăng nhiệt độ thủy nhiệt từ 185 °C đến 205 °C ban đầu pha vật liệu  $\text{Na}_{0,55}\text{MnO}_2$  (Birnessite) được hình thành ở dạng hạt. Khi nhiệt độ tăng lên thì hạt này dần tách ra trở thành dạng lá và cuối cùng trở thành dạng dây nano có kích thước cỡ 30 nm và chiều dài cỡ hàng chục  $\mu\text{m}$ . Vật liệu  $\text{Na}_{0,44}\text{MnO}_2$  hoàn toàn đơn pha có kích thước 30 ÷ 50 nm theo chiều ngang và có chiều dài từ vài trăm nano mét tới vài micro mét chỉ thu được khi tiến hành tái kết tinh vật liệu  $\text{Na}_x\text{MnO}_2$  đã thủy nhiệt ở nhiệt độ 205 °C bằng cách ủ nhiệt ở 600 °C liên tục trong 6 giờ.

**Từ khóa:** Dây nano,  $\text{Na}_{0,44}\text{MnO}_2$ , Birnessite, Pin natri – ion, NiBs.

Nhận bài ngày 15.7.2017; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 10.9.2017

Liên hệ tác giả: Tạ Anh Tấn; Email: tatan@daihocthudo.edu.vn

## 1. MỞ ĐẦU

Pin ion liti (LIBs) đã được sử dụng rộng rãi trong nhiều ứng dụng như các phương tiện vận tải chạy bằng điện năng, các thiết bị điện tử di động, rôbot, máy tính... Sự sử dụng rộng rãi của pin ion liti dẫn đến nhu cầu khai thác và sử dụng kim loại liti tăng lên rất nhanh [1], tuy nhiên, trữ lượng khoáng sản liti trong lớp vỏ trái đất là không nhiều (chiếm 0,0007% lớp vỏ trái đất). Do vậy, trong những năm gần đây giá thành của kim loại liti đã tăng lên nhanh chóng. Trong tình hình đó, việc tìm kiếm các kim loại khác có thể thay thế cho liti trong pin ion trở thành một vấn đề cấp thiết, được nhiều nhà khoa học và các tập đoàn lớn quan tâm nghiên cứu và triển khai ứng dụng.

Hiện nay, pin ion natri (NIBs) đang nổi lên là một ứng cử viên có khả năng thay thế pin ion liti trong nhiều lĩnh vực, đặc biệt là lĩnh vực dự trữ năng lượng qui mô lớn. Pin NIBs có nhiều ưu điểm như giá thành rẻ do trữ lượng natri trong vỏ trái đất lớn (chiếm 2.6% lớp vỏ trái đất), phương pháp chế tạo đơn giản và thân thiện với môi trường. Cơ chế điện hóa của pin ion natri và pin ion liti là tương đồng, nhưng do kích thước ion natri lớn hơn ion liti do vậy sự khuếch tán của ion natri trong cấu trúc của các vật liệu catot gặp nhiều khó khăn hơn so với ion liti. Bởi vậy, nghiên cứu chế tạo vật liệu điện cực có cấu trúc và hình thái học phù hợp cho sự khuếch tán của ion natri là cần thiết và thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học.

Nhiều vật liệu catot cho pin NIBs đã được công bố như vật liệu cấu trúc lớp  $\text{NaMO}_2$  (M = các kim loại chuyển tiếp) [2-9], vật liệu có cấu trúc đường hầm  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  [10-25], vật liệu siêu dẫn ion  $\text{Na}^+$  (có độ dẫn ion ở nhiệt độ phòng trong khoảng  $10^{-5} \div 10^{-4} \text{ S.cm}^{-1}$ ) [26], ôxít kim loại [27, 28], Vật liệu  $\text{NaMnO}_4$  [29]... Trong các vật liệu trên, vật liệu cấu trúc lớp  $\text{Na}_x\text{MnO}_2$  được tập trung nghiên cứu nhiều hơn do có dung lượng lớn, chu kỳ xả/ nạp dài. Ví dụ: vật liệu  $\text{Na}_{0.66}\text{MnO}_2$  có dung lượng 155 mAh/g, sau 10 chu kỳ dung lượng giảm đi khoảng 55% [2, 12-14, 24, 30-32]. Trong số vật liệu  $\text{Na}_x\text{MO}_2$  đã được các tài liệu công bố chúng ta nhận thấy nổi bật lên có vật liệu dây nano  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  mặc dù có dung lượng ở tầm trung bình nhưng có điện áp tương đối cao [33].

Có nhiều cách để tổng hợp vật liệu  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  như thiêu kết thông thường [34, 35], thủy nhiệt [15, 16, 19, 36], phản ứng pha rắn [12, 14, 17, 24, 37], sol-gel [13, 38]... Trong các phương pháp tổng hợp vật liệu đã nêu trên, phương pháp thủy nhiệt thu được vật liệu dây nano  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  đơn pha và đồng thời cho những đặc tính hoạt động điện hóa ổn định. Trong nghiên cứu này, chúng tôi tập trung vào chế tạo vật liệu cấu trúc đường hầm  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  tổng hợp bằng phương pháp thủy nhiệt. Trong cấu trúc của vật liệu này, các ion  $\text{Na}^+$  có thể dễ dàng di chuyển trong đường hầm hình chữ S, điều này có thể làm tăng tính chất điện hóa của vật liệu.

## 2. THỰC NGHIỆM CHẾ TẠO VẬT LIỆU

Chuẩn bị 2 gam vật liệu  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  hòa trong 80ml NaOH 5M và khuấy từ cho vật liệu được trộn đều trong dung dịch, sau đó hỗn hợp được đựng trong một bình Autoclave bằng Teflon có dung tích 120 ml và ủ nhiệt 48 giờ ở 185 °C. Sau đó để nguội tự nhiên. Hỗn hợp thu được hòa trong nước khử ion, khuấy từ và rung siêu âm trong 1 giờ và tiếp theo nó được rửa nhiều lần bằng nước khử ion. Vật liệu thu được tiếp tục hòa trong 80 ml NaOH 5 M và khuấy từ và tiếp tục được đựng trong một bình Autoclave bằng Teflon có dung tích 120 ml để ủ nhiệt 48 giờ ở 185 °C, sau đó để nguội tự nhiên. Hỗn hợp thu được, được rửa

nhiều lần bằng nước khử ion và quay ly tâm nhằm loại trừ NaOH còn dư cho tới khi sạch NaOH. Vật liệu thu được đem sấy khô trong chân không 10 giờ ở 120 °C ta thu được vật liệu kí hiệu T185. Tiếp đó, một phần vật liệu này được gia nhiệt tới 600 °C trong không khí với tốc độ 10 độ/phút và ủ ở 600 °C liên tục trong 6 giờ. Vật liệu cuối cùng được để nguội tự nhiên và ký hiệu là T185U600. Làm hoàn toàn với quy trình như trên cho vật liệu này lần lượt ở các điều kiện nhiệt độ 190 °C, 195 °C, 200 °C và 205°C, ta thu được các vật liệu được ký hiệu như

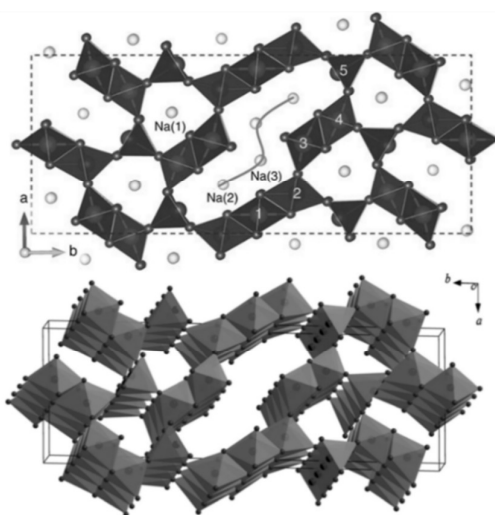
Đặc điểm cấu trúc của vật liệu được khảo sát trên hệ nhiễu xạ X ray – D5005 SIEMEN với nguồn phát xạ Cu K $\alpha$  ( $\lambda = 1.5406\text{Å}$ ). Đặc điểm hình thái học được khảo sát trên kính hiển vi điện tử quét FE-SEM HITACHI 4800.

**Bảng 1.** Bảng ký hiệu vật liệu  $\text{Na}_x\text{MnO}_2$  tổng hợp bằng phương pháp thủy nhiệt ở 185 °C, 190 °C, 195 °C, 200 °C và 20 °C.

Nhiệt độ	185 °C	190 °C	195 °C	200 °C	205 °C
Tên mẫu	T185	T190	T195	T200	T205
Mẫu ủ nhiệt	T185U600	T190 U600	T195 U600	T200 U600	T205 U600

### 3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Trong cấu trúc trực thoi của vật liệu  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$ , ion Mn nằm tại hai vị trí khác nhau, vị trí thứ nhất trong khối bát diện  $\text{MnO}_6$  và vị trí thứ hai trong khối kim tự tháp đáy vuông  $\text{MnO}_5$ . Các khối bát diện  $\text{MnO}_6$  liên kết cạnh với nhau và liên kết đỉnh với khối kim tự tháp  $\text{MnO}_5$  để tạo ra mạng không gian với hai loại đường hầm. Một là đường hầm lớn có dạng hình chữ S và đường hầm còn lại nhỏ hơn có dạng hình ngũ giác [11, 39, 40]. Trong đường hầm hình chữ S, có hai vị trí mà ion natri có thể chiếm giữ ( $\text{Na}_1$  và  $\text{Na}_2$ ) và chỉ có một ion natri nằm trong đường hầm nhỏ hơn ( $\text{Na}_3$ ). Hình 1, mô tả cấu trúc của vật liệu  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  và vị trí của các ion Mn, Na. Trong quá trình xả và nạp, các ion Na khuếch tán dọc theo trục c của cấu trúc vật liệu. Các

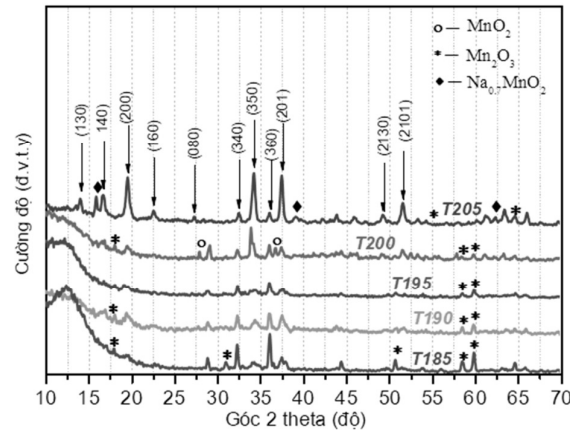


**Hình 1.** Cấu trúc của vật liệu  $\text{Na}_x\text{MnO}_2$ .



ion natri tại vị trí  $\text{Na}_1$  và  $\text{Na}_2$  có thể tham gia quá trình tiêm vào/thoát ra khỏi vật liệu, trong khi ion natri nằm trong đường hầm nhỏ hơn bị mắc kẹt tại vị trí  $\text{Na}_3$  và không tham gia vào quá trình khuếch tán [39, 40].

Hình 2, phổ đồ XRD của các mẫu T185, T190, T195, T200 và T205 được tổng hợp bởi phương pháp thủy nhiệt từ các tiền chất  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  và  $\text{NaOH}$  ở các nhiệt độ 185 °C, 190 °C, 195 °C, 200 °C và 205 °C. Các đường nhiễu xạ chỉ ra rằng ngay ở nhiệt độ thủy nhiệt 185 °C đã xuất hiện các đỉnh nhiễu xạ tương ứng với các góc 2 $\theta$ : (160) ở 22.72°, (340) ở 32.36°, (350) ở 34.22°, (360) ở 36.17°, (201) ở 37.58° và (2130) ở 49.21°, sáu đỉnh này thuộc về thẻ PDF chuẩn JPCDS số 27-0750 có cấu trúc orthorhombic của nhóm không gian Pbam tức là pha vật liệu  $\text{Na}_{0,44}\text{MnO}_2$ .



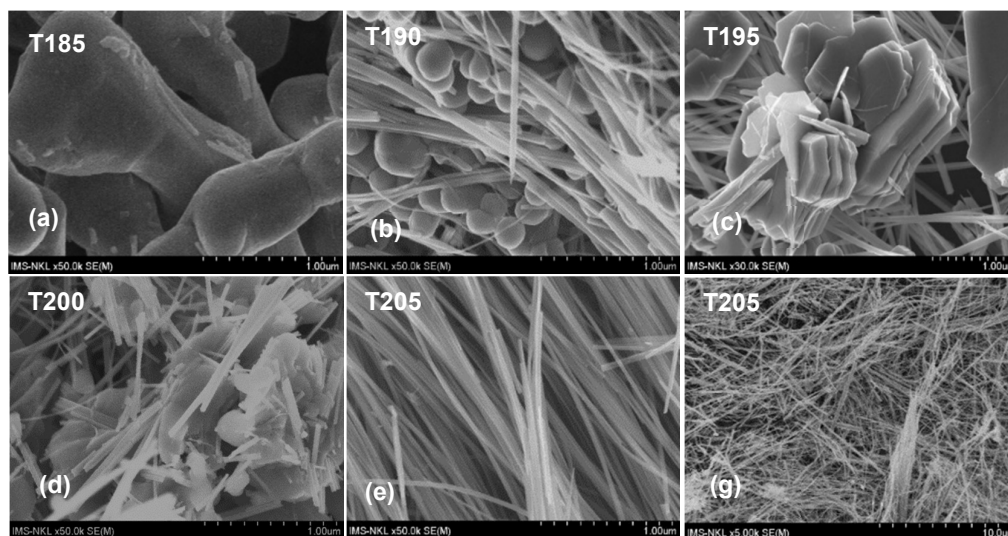
**Hình 2.** Phổ XRD của các mẫu T185, T190, T195, T200, T205 tổng hợp bằng phương pháp thủy nhiệt ở 185°C, 190°C, 195°C, 200°C, 205°C.

Tăng nhiệt độ của quá trình thủy nhiệt theo bước 5°C tức là 190°C, 195°C và 200°C, thu được các mẫu T190, T195, T200. Phổ XRD trong Hình 2, của các mẫu này cho thấy các đỉnh đặc trưng cho  $\text{Mn}_3\text{O}_4$  yếu dần, các đỉnh đặc trưng cho pha  $\text{Na}_{0,44}\text{MnO}_2$  vẫn còn yếu chưa rõ nét.

Để đạt được pha mong muốn, nhiệt độ thủy nhiệt được tăng lên 205°C như một số nghiên cứu đã công bố [15, 19, 41]. Ở nhiệt độ này, Phổ nhiễu xạ XRD cho thấy các đỉnh nhiễu xạ đặc trưng cho pha  $\text{Na}_{0,44}\text{MnO}_2$  được nhìn thấy là sắc nét và các pha không mong muốn chỉ còn tồn tại một số đỉnh nhỏ mờ nhạt, nhưng pha mong muốn tổng hợp được vẫn chưa hoàn toàn đơn pha. Vì vậy điều kiện của quá trình thủy nhiệt được tăng thêm 5°C. Tuy nhiên kết quả thu được cho pha vật liệu tạp trở lại mạnh hơn. Do vậy chúng tôi dừng lại ở nhiệt độ này và cho rằng nhiệt độ tổng hợp ở 205°C pha  $\text{Na}_{0,44}\text{MnO}_2$  hình thành là tốt nhất.

Ảnh SEM của các mẫu T185, T190, T195, T200, T205 tổng hợp bằng phương pháp thủy nhiệt ở Hình 3 cho ta thấy sự thay đổi rất rõ rệt về hình thái học của vật liệu  $\text{Na}_x\text{MnO}_2$  tổng hợp từ phương pháp thủy nhiệt trong 96 giờ ở các nhiệt độ khác nhau. Mẫu T185 tổng hợp ở nhiệt độ 185°C Hình 3a, có hình dạng hạt tương tự với hạt của  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  [42]. Các mẫu T190, T195 và T200 cho thấy hình thái học của vật liệu bắt đầu trở nên phức tạp hơn, bao gồm dạng hạt, dạng lá có thể xem như đang tách ra từ một khối và đặc trưng nhất ở đây là

dạng dây. Theo sự tăng lên của nhiệt độ trong quá trình thủy nhiệt, một sự biến đổi về hình thái học rất rõ ràng, đó là sự biến đổi từ dạng hạt sang dạng dây. Ở mẫu T205 *Hình 3e*, ảnh SEM cho thấy vật liệu thu được hoàn toàn có dạng dây nano với kích thước ngang chừng ~ 30 nm và dài từ vài trăm nm đến hàng chục  $\mu\text{m}$ .



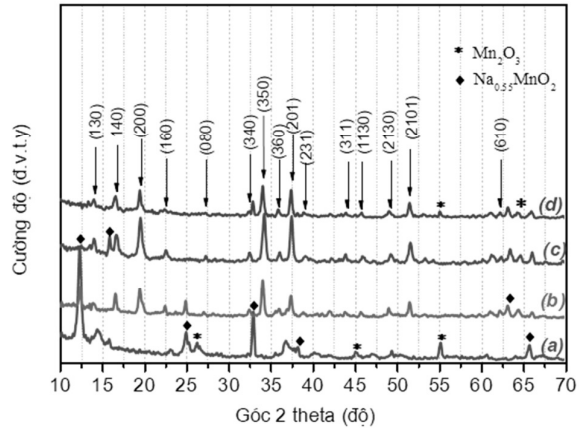
**Hình 3.** Ảnh SEM mẫu  $\text{Na}_x\text{MnO}_2$  185°C, 190°C, 195°C, 200°C và 205°C.

*Hình 4*, phổ nhiễu xạ XRD của các mẫu  $\text{Na}_x\text{MnO}_2$  sau khi thủy nhiệt ở 205°C 48 giờ (a), 72 giờ (b) và 96 giờ (c) và sau khi thủy nhiệt 96 giờ được ủ lại nhiệt ở 600°C trong 6 giờ (d). *Hình 4a*, vật liệu thủy nhiệt ở 205°C trong 48 giờ có các đỉnh nhiễu xạ XRD thuộc về thẻ JPCDS số 43-1456 của pha tinh thể birnessite  $\text{Na}_{0.55}\text{MnO}_2$  cùng một số đỉnh nhỏ thuộc về pha tinh thể  $\text{Mn}_2\text{O}_3$ . *Hình 4b*, vật liệu thủy nhiệt ở 205°C trong 72 giờ cho các đỉnh nhiễu xạ của pha  $\text{Na}_{0.55}\text{MnO}_2$  và  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  có cường độ yếu đi và xuất hiện các đỉnh thuộc pha  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  điều này tương tự như Johan Park và đồng nghiệp đã báo cáo [42]. *Hình 4c*, vật liệu thủy nhiệt ở 205°C trong thời gian 96 giờ cho pha  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  có các đỉnh nhiễu xạ sắc nét, các đỉnh thuộc về pha  $\text{Na}_{0.55}\text{MnO}_2$  và  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  còn lại rất nhỏ (không đáng kể so với pha  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$ ) điều này tương tự với kết quả của một số tác giả đã nghiên cứu và công bố [16, 42]. *Hình 4d*, phổ nhiễu xạ của vật liệu thủy nhiệt ở 205°C trong thời gian 96 giờ sau đó được ủ nhiệt ở 600°C trong thời gian 6 giờ, các đỉnh thuộc về pha  $\text{Na}_{0.55}\text{MnO}_2$  đã hoàn toàn biến mất, chỉ còn tồn tại một đỉnh nhỏ của pha tạp  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  ở góc  $2\theta = 55.36^\circ$ . Từ các kết quả trên cho thấy quá trình thủy nhiệt tạo vật liệu  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  gồm hai giai đoạn. Ban đầu là phản ứng giữa oxit  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  với NaOH để tạo ra thành phần pha

$\text{Na}_{0.55}\text{MnO}_2$  (Birnessite) có cấu trúc lớp [16, 42]. Điều này được thể hiện trên phổ XRD của vật liệu sau khi thủy nhiệt trong 48 giờ ở  $205^\circ\text{C}$ .

Tiếp tục quá trình thủy nhiệt các lớp vật liệu này phát triển lớn lên và phân tách thành dây nano  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$ . Kết quả này hoàn toàn tương tự với các tác giả trong [16, 42-44] khi cho rằng quá trình chuyển pha trong vật liệu  $\text{Na}_x\text{MnO}_2$  là do sự sắp xếp lại trật tự của những vị trí khuyết Na hoặc các chuyển dời liên quan đến sự trượt của các mặt phẳng oxy.

Trên Hình 5, ảnh SEM của các mẫu  $\text{Na}_x\text{MnO}_2$  thủy nhiệt trong thời gian 48 giờ. Có thể nhận thấy ảnh SEM của vật liệu sau khi thủy nhiệt có nhiều dạng hình thái học khác nhau. Ngoài các hạt vật liệu có kích thước nhỏ khoảng 100-200 nm được xem như là của vật liệu oxit  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  còn dư còn có hạt có kích thước một vài micro mét được xem là của vật liệu Birnessite  $\text{Na}_{0.55}\text{MnO}_2$  đã hình thành. Khi quan sát những hạt vật liệu có kích thước lớn, thấy các hạt vật liệu có dạng lớp và tại đó có những dây nano vật liệu đang được tách ra từ đây. Kết quả này hoàn toàn phù hợp với kết quả nhận được từ giản đồ nhiễu xạ XRD, là vật liệu tồn tại đa pha và chủ yếu là từ oxit  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  và  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$ .



**Hình 4.** Phổ nhiễu xạ XRD của các mẫu  $\text{Na}_x\text{MnO}_2$  sau khi thủy nhiệt ở  $205^\circ\text{C}$  trong 48 giờ (a), 72 giờ (b) 96 giờ (c) và sau khi thủy nhiệt ở 96 giờ được ủ nhiệt ở  $600^\circ\text{C}$  trong 6 giờ (d).



**Hình 5.** Ảnh SEM của vật liệu  $\text{Na}_x\text{MnO}_2$  thủy nhiệt trong 48 giờ.

Hình 3-38, Ảnh SEM mẫu T205 sau khi ủ ở 600°C trong 6 giờ cho thấy hình ảnh của vật liệu dạng thanh, đồng đều với kích thước của thanh vào khoảng 30 ÷ 50 nm theo chiều ngang và có chiều dài từ vài trăm nano mét tới vài micro mét.

Như vậy ta có thể kết luận rằng, bằng phương pháp thủy nhiệt tại 205°C sau 96 giờ vật liệu sau đó tiếp tục được ủ nhiệt ở 600°C trong không khí thời gian 6 giờ. Kết quả cho thấy ta đã thu được vật liệu các thông số mạng a, b, c và thể tích ô đơn vị tương ứng là 9.12361 Å, 26.28665 Å, 2.81721 Å và 675.6480 Å<sup>3</sup>. Những giá trị này đã có sự thay đổi với trước khi ủ nhiệt. Tuy nhiên nó vẫn là phù hợp với các kết quả đã công bố của nhiều nhóm nghiên cứu về thông số mạng của vật liệu Na<sub>0,44</sub>MnO<sub>2</sub> [11, 19, 20, 39, 45]. Và chúng tôi hy vọng rằng vật liệu này sẽ cho hoạt động điện hóa tốt hơn.

#### 4. KẾT LUẬN

Tóm lại, vật liệu Na<sub>x</sub>MnO<sub>2</sub> tổng hợp bằng phương pháp thủy nhiệt từ các vật liệu ban đầu Mn<sub>2</sub>O<sub>3</sub> và NaOH bằng phương pháp thủy nhiệt (hydrothermal) ở các nhiệt độ 185°C, 190°C, 195°C, 200°C và 205°C cho thấy, ngay ở nhiệt độ thủy nhiệt 185°C đã có sự hình thành của pha vật liệu Na<sub>0,44</sub>MnO<sub>2</sub>. Tuy nhiên phải đến nhiệt độ 205°C của quá trình thủy nhiệt mới thu được vật liệu Na<sub>0,44</sub>MnO<sub>2</sub> gần như đơn pha. Thực nghiệm cũng cho thấy trong quá trình tăng nhiệt độ thủy nhiệt từ 185°C đến 205°C ban đầu pha vật liệu Na<sub>0,55</sub>MnO<sub>2</sub> (Birnessite) được hình thành ở dạng hạt, khi nhiệt độ tăng lên thì hạt này dần tách ra trở thành dạng lá và cuối cùng trở thành dạng dây nano có kích thước cỡ 30 nm và chiều dài cỡ hàng chục μm. Vật liệu Na<sub>0,44</sub>MnO<sub>2</sub> hoàn toàn đơn pha có kích thước 30 ÷ 50 nm theo chiều ngang và có chiều dài từ vài trăm nano mét tới vài micro mét chỉ thu được khi ủ nhiệt tái kết tinh vật liệu Na<sub>x</sub>MnO<sub>2</sub> thu được ở nhiệt độ 205°C. Chúng tôi hy vọng rằng vật liệu Na<sub>0,44</sub>MnO<sub>2</sub> sẽ cho một hoạt động điện hóa tốt nhằm mục đích sử dụng làm điện cực catot cho pin natri ion.



**Hình 6.** Ảnh SEM của các mẫu được chế tạo bằng thủy nhiệt trong 96 giờ và sau khi ủ lại nhiệt

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. [Http://spilpunt.blogspot.com/2011/12/lithium.html](http://spilpunt.blogspot.com/2011/12/lithium.html).
2. Yuan, D., et al. (2014), "P2-type  $\text{Na}_{0.67}\text{Mn}_{0.65}\text{Fe}_{0.2}\text{Ni}_{0.15}\text{O}_2$  Cathode Material with High-capacity for Sodium-ion Battery", *Electrochimica Acta*, 116: pp.300-305.
3. Van Nghia, N., P.-W. Ou, and I.M. Hung (2015), "Synthesis and Electrochemical Properties of Sodium Manganese-based Oxide Cathode Material for Sodium-ion Batteries", *Electrochimica Acta*, 161: pp.63-71.
4. Velikokhatnyi, O.I., D. Choi, and P.N. Kumta (2006), "Effect of boron on the stability of monoclinic  $\text{NaMnO}_2$ : Theoretical and experimental studies", *Materials Science and Engineering: B*, 128(1-3): pp.115-124.
5. Nohira, T., T. Ishibashi, and R. Hagiwara (2012), "Properties of an intermediate temperature ionic liquid  $\text{NaTFSA-CSTFSA}$  and charge-discharge properties of  $\text{NaCrO}_2$  positive electrode at 423 K for a sodium secondary battery", *Journal of Power Sources*, 205: pp.506-509.
6. Bhide, A. and K. Hariharan(2011), "Physicochemical properties of  $\text{Na}_x\text{CoO}_2$  as a cathode for solid state sodium battery", *Solid State Ionics*, 192(1): pp.360-363.
7. Ding, J.J., et al. (2013), "Electrochemical properties of P2-phase  $\text{Na}_{0.74}\text{CoO}_2$  compounds as cathode material for rechargeable sodium-ion batteries", *Electrochimica Acta*, 87(0): pp.388-393.
8. Rai, A.K., et al. (2014), "Electrochemical properties of  $\text{Na}_x\text{CoO}_2$  ( $x \sim 0.71$ ) cathode for rechargeable sodium-ion batteries", *Ceramics International*, 40(1, Part B): pp.2411-2417.
9. Ding, J.-J., et al. (2012), "Cycle performance improvement of  $\text{NaCrO}_2$  cathode by carbon coating for sodium ion batteries", *Electrochemistry Communications*, 22(0): pp.85-88.
10. Xie, M., et al. (2014), "Synthesis-Microstructure-Performance Relationship of Layered Transition Metal Oxides as Cathode for Rechargeable Sodium Batteries Prepared by High-Temperature Calcination", *ACS Applied Materials & Interfaces*, 6(19): pp.17176-17183.
11. Sauvage, F., et al. (2007), "Study of the Insertion/Deinsertion Mechanism of Sodium into  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$ ", *Inorganic Chemistry*, 46(8): pp.3289-3294.
12. Floros, N., et al. (2001), "Calcium Insertion in the  $\text{Na}_4\text{Mn}_9\text{O}_{18}$  Tunnel Structure:  $\text{Na}_{1.1}\text{Ca}_{1.8}\text{Mn}_9\text{O}_{18}$ ", *Journal of Solid State Chemistry*, 162(1): pp.34-41.
13. Doeff, M.M., et al. (2002), "Synthesis and characterization of a copper-substituted manganese oxide with the  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  structure". *Journal of Power Sources*, 112(1): pp.294-297.
14. Doeff, M.M., T.J. Richardson, and K.-T. Hwang (2004), Electrochemical and structural characterization of titanium-substituted manganese oxides based on  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$ ", *Journal of Power Sources*, 135(1-2): pp240-248.
15. Hosono, E., et al. (2008), "Synthesis of single crystalline electro-conductive  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  nanowires with high aspect ratio for the fast charge-discharge Li ion battery", *Journal of Power Sources*, 182(1): pp.349-352.
16. Li, Y. and Y. Wu (2009), "Formation of  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  nanowires via stress-induced splitting of birnessite nanosheets", *Nano Research*, 2(1): pp.54-60.
17. Whitacre, J.F., A. Tevar, and S. Sharma (2010), " $\text{Na}_4\text{Mn}_9\text{O}_{18}$  as a positive electrode material for an aqueous electrolyte sodium-ion energy storage device", *Electrochemistry Communications*, 12(3): pp.463-466.

18. Park, S.I., et al. (2011), "Electrochemical Properties of  $\text{NaTi}_2(\text{PO}_4)_3$  Anode for Rechargeable Aqueous Sodium-Ion Batteries", *Journal of The Electrochemical Society*, 158(10): pp.A1067-A1070.
19. Hosono, E., et al. (2012), "High power Na-ion rechargeable battery with single-crystalline  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  nanowire electrode", *Journal of Power Sources*, 217: pp.43-46.
20. J.-H. Lee, R.B., G. Popov, E. Pomerantseva, F. Nan, G. a. Botton, and L. F. Nazar (2012), "The role of vacancies and defects in  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  nanowire catalysts for lithium–oxygen batteries", *Energy Environ. Science*, 5(11): pp.9558.
21. Kim, D.J., et al. (2013), "Diffusion behavior of sodium ions in  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  in aqueous and non-aqueous electrolytes", *Journal of Power Sources*, 244: pp.758-763.
22. Ruffo, R., et al. (2013), Impedance analysis of  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  positive electrode for reversible sodium batteries in organic electrolyte", *Electrochimica Acta*, 108: pp.575-582.
23. Dai, K., et al. (2015), " $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  with very fast sodium diffusion and stable cycling synthesized via polyvinylpyrrolidone-combustion method", *Journal of Power Sources*, 285: pp.161-168.
24. Wang, C.-H., et al. (2015), "Rechargeable Na/ $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  cells with ionic liquid electrolytes containing various sodium solutes", *Journal of Power Sources*, 274: pp.1016-1023.
25. Rui Ma, H.J., Hongmin Zhu, Shuqiang Jiao\* (2016), "Ultra-long Nanorods of Single-crystalline  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  as Cathode Materials for Sodium-ion Batteries", *International Journal of Electrochem science*, 11: pp.7242-7253.
26. M. Debbichi, S.L. (2015), "Crystal and electronic structures of nitridophosphate compounds as cathode materials for Na-ion batteries", *Physical Review B*, 92: pp.085127.
27. Zhao, M., et al. (2014), "Good discharge capacities of  $\text{NaV}_6\text{O}_{15}$  material for an aqueous rechargeable lithium battery", *Electrochimica Acta*, 138: pp.187-192.
28. Liu, H., et al. (2011), "Electrochemical insertion/deinsertion of sodium on  $\text{NaV}_6\text{O}_{15}$  nanorods as cathode material of rechargeable sodium-based batteries", *Journal of Power Sources*, 196(2): pp.814-819.
29. Akimoto, J., et al. (2006), "High-pressure synthesis and crystal structure analysis of  $\text{NaMn}_2\text{O}_4$  with the calcium ferrite - type structure", *Journal of Solid State Chemistry*, 179(1): pp.169-174.
30. Zhao, W., et al. (2014), "Synthesis of metal ion substituted P2- $\text{Na}_{2/3}\text{Ni}_{1/3}\text{Mn}_{2/3}\text{O}_2$  cathode material with enhanced performance for Na ion batteries", *Materials Letters*, 135: pp.131-134.
31. Stoyanova, R., et al. (2010), "Stabilization of over-stoichiometric  $\text{Mn}^{4+}$  in layered  $\text{Na}_{2/3}\text{MnO}_2$ ", *Journal of Solid State Chemistry*, 183(6): pp.1372-1379.
32. Ruffo, R., et al. (2013), "Impedance analysis of  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  positive electrode for reversible sodium batteries in organic electrolyte", *Electrochimica Acta*, 108(0): pp.575-582.
33. Jian, Z., H. Yu, and H. Zhou (2013), "Designing high-capacity cathode materials for sodium-ion batteries", *Electrochemistry Communications*, 34(0): pp.215-218.
34. Akimoto, J., et al. (2013), "Soft chemical synthesis and electrochemical properties of  $\text{Li}_{0.90}\text{Mn}_{0.90}\text{Ti}_{0.10}\text{O}_2$  with the  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$ -type tunnel structure", *Journal of Power Sources*, 244: pp.382-388.
35. Cao, C., et al. (2014), "Nafion membranes as electrolyte and separator for sodium-ion battery", *International Journal of Hydrogen Energy*, (0).

36. Whitacre, J.F., et al. (2012), "An aqueous electrolyte, sodium ion functional, large format energy storage device for stationary applications", *Journal of Power Sources*, 213(0): pp.255-264.
37. Sauvage, F., E. "Baudrin, and J.M. Tarascon (2007), Study of the potentiometric response towards sodium ions of  $\text{Na}_{0.44-x}\text{MnO}_2$  for the development of selective sodium ion sensors", *Sensors and Actuators B: Chemical*, 120(2): pp.638-644.
38. Kim, D.J., et al. (2013), "Diffusion behavior of sodium ions in  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  in aqueous and non-aqueous electrolytes", *Journal of Power Sources*, 244(0): pp.58-763.
39. Wang, Y., et al. (2015), "P2- $\text{Na}_{0.6}[\text{Cr}_{0.6}\text{Ti}_{0.4}]\text{O}_2$  cation-disordered electrode for high-rate symmetric rechargeable sodium-ion batteries", *Journal of Power Sources*, 6: pp.6954.
40. Ishida, N., et al. (2013), "Soft Chemical Synthesis and Electrochemical Properties of  $\text{Li}_{0.82}\text{MnO}_2$  with the  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$ -Type Tunnel Structure", *Journal of The Electrochemical Society*, 160(2): pp.A297-A301.
41. Zhang, B.H., et al. (2014), "Nanowire  $\text{Na}_{0.35}\text{MnO}_2$  from a hydrothermal method as a cathode material for aqueous asymmetric supercapacitors", *Journal of Power Sources*, 253: pp.98-103.
42. Park, Y., et al. (2015), "Understanding hydrothermal transformation from  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  particles to  $\text{Na}_{0.55}\text{Mn}_2\text{O}_4 \cdot 1.5\text{H}_2\text{O}$  nanosheets, nanobelts, and single crystalline ultra-long  $\text{Na}_4\text{Mn}_9\text{O}_{18}$  nanowires", *Journal of Power Sources*, 5: pp.18275.
43. Tevar, A.D. and J.F. Whitacre, "Relating Synthesis Conditions and Electrochemical Performance for the Sodium Intercalation Compound  $\text{Na}_4\text{Mn}_9\text{O}_{18}$  in Aqueous Electrolyte", *Journal of The Electrochemical Society*. 157(7): pp. A870-A875.
44. Subramania, A., N. Angayarkanni, and T. Vasudevan (2007), "Effect of PVA with various combustion fuels in sol-gel thermolysis process for the synthesis of  $\text{LiMn}_2\text{O}_4$  nanoparticles for Li-ion batteries", *Materials Chemistry and Physics*, 102(1): pp.19-23.

## THE INFLUENCE OF TEMPERATURE DURING HYDROTHERMAL THE FORMATION OF $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$ NANOWIRE

**Abstract:**  $\text{Na}_x\text{MnO}_2$  electrode material synthesized from hydrothermal  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  and  $\text{NaOH}$  precursors at 185 °C, 190 °C, 195 °C, 200 °C and 205 °C, showed that The 185 °C hydrothermal temperature had the formation of the  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  material phase. However, as the temperature of the hydrothermal process increases to 205 °C, the synthesized  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  material is nearly single-phase. Experimentation also showed that during the hydrothermal temperature increase from 185 °C to 205 °C initially the  $\text{Na}_{0.55}\text{MnO}_2$  material (Birnessite) was formed in granular form. As the temperature rises, the grain gradually decomposes to form a sheet and eventually becomes a nanowire of size 30 nm and a tens of  $\mu\text{m}$  in length.  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$  material is completely single-phase with dimensions 30 ÷ 50 nm horizontally and has a length from several hundred nanometers to several micrometers only obtained when recrystallization of  $\text{Na}_x\text{MnO}_2$  material was hydrothermally heated 205 °C by heating at 600 °C continuously for 6 hours.

**Keywords:** Nanowire,  $\text{Na}_{0.44}\text{MnO}_2$ , Birnessite, Sodium-ion battery, NiBs.

# XỬ LÝ ION PHOTPHAT TRONG NƯỚC THẢI DÂN DỤNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP SINH HỌC - ĐỀ XUẤT MỘT SỐ BIỆN PHÁP GIẢM THIỂU

Đào Đình Thuần

Trường Đại học Mỏ - Địa chất

**Tóm tắt:** Nước là một trong những yếu tố cơ bản quan trọng quyết định sự phát triển của con người, động vật, thực vật, các sản phẩm công nghiệp và dịch vụ khác. Tuy nhiên, sau khi sử dụng tài nguyên nước không hợp lý thì đều trở thành nước thải và bị ô nhiễm ở các mức khác nhau. Một trong những tác nhân gây ra chất thải gây ô nhiễm nguồn nước là các ion chứa nitơ và photpho. Chúng đi trực tiếp đi vào nguồn nước từ ion hoặc chúng được sinh ra trong quá trình phân hủy khác nhau. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu xử lý ion photphat trong nước thải ở sông Tô Lịch bởi một loài thực vật có tên khoa học là "Eichornia Crassipipes Solms".

Việc xác định ion octo - photphat trước và sau khi xử lý được thực hiện bằng phương pháp quang phổ với hợp chất màu xanh molipden / hấp thụ ở  $\lambda = 890 \text{ nm}$ . Các kết quả phân tích cho phép xử lý nước thải và sự phú dưỡng rất tốt.

**Từ khoá:** Ô nhiễm ion photphat.

Nhận bài ngày 10.8.2017; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 10.9.2017

Liên hệ tác giả: Đào Đình Thuần; Email: daothuan64@gmail.com

## 1. MỞ ĐẦU

Có nhiều tác nhân gây ra ô nhiễm nước thải. Một trong những tác nhân gây ra ô nhiễm nguồn nước là chất dinh dưỡng chứa N và P. Chúng đi trực tiếp vào nguồn nước từ những ion hay được sinh ra do quá trình phân hủy khác nhau. Các ion dinh dưỡng ( $\text{NH}_4^+$ ,  $\text{NO}_3^-$ ,  $\text{H}_2\text{PO}_4^-$ ,  $\text{HPO}_4^{2-}$ ) là thực phẩm của rong tảo, khi các hàm lượng này cao thì rong tảo phát triển mạnh và nhanh, nước có màu xanh lục, độ nhớt tăng, đó là hiện tượng phú dưỡng (quá nhiều chất dinh dưỡng (Eutrophication)).

Các chất hữu cơ là thực phẩm của vi sinh vật (VSV). Khi có nhiều dinh dưỡng này thì VSV phát triển mạnh và cần tiêu thụ một lượng oxy hòa tan đáng kể, nếu lượng oxy không kịp bù đắp thì sẽ gây ra hiện tượng thiếu oxy trong nước (oxy hòa tan (DO)). Do đó, những động vật thủy sinh như tôm, cá... là những VSV hiếu khí cần có oxy để sống sẽ bị chết, còn



các VSV yếm khí lại có điều kiện phát triển mạnh, tạo ra các sản phẩm có mùi hôi thối. Vì vậy, nước đã bị ô nhiễm.

Theo quy định của Cục Bảo vệ Môi trường Mỹ ((US - EPA - 1986), nay là US - EPA - 2010) về chất lượng nước mặt, nếu hàm lượng photphat đã vượt quá 0,05 mgP/l trong các hồ, ao chứa là không đạt yêu cầu chất lượng, chỉ được duy trì ở nồng độ 0,025 mgP/l. Các nguồn nước bổ sung có nồng độ photphat  $\geq 0,10$ mgP/l thì không được đổ vào các hồ, ao chứa vì nó sẽ làm cho rong tảo phát triển mạnh, gây ô nhiễm nguồn nước, các quá trình tự nhiên này không thể tự làm sạch. Các nguồn nước bổ sung phải có nồng độ photphat khoảng 0,01 - 0,02 mgP/l thì không gây nên sự ô nhiễm.

## 2. THỰC NGHIỆM

### 2.1. Dụng cụ, máy móc, hóa chất

#### a) Dụng cụ, máy móc

- Các loại dụng cụ thủy tinh, bình định mức, pipet các loại.
- Giấy lọc băng xanh 390, màng lọc 0,45  $\mu$ m.
- Thùng nhựa 200 lít (3 cái).
- Máy đo pH Meter - HM - 165 (Hãng ToA của Nhật).
- Cân phân tích GP (150 - 3P, độ chính xác  $\pm 0,1$  mg).
- Máy đo DO (độ oxy hòa tan) của Anh.
- Máy chung nước cất 2 lần.
- Máy quang phổ UV - Vis (Biochrom.Ltd của Anh).

#### b) Hóa Chất: Sử dụng các loại PA của hãng Merck (Đức)

- Dung dịch  $H_2SO_4$  5N.
  - Dung dịch kaliantimonyl tetrat: hòa tan 1,3700 kg  $K(S60)C_4H_4O_6.1/2H_2O$  trong 400 ml nước cất định mức vào bình 500 ml, bảo quản dung dịch trong lọ có nút nhám.
  - Dung dịch amoni molipdat: hòa tan 20 g  $(NH_4)_6Mo_7O_{24}.4H_2O$  trong 500 ml nước cất, bảo quản trong chai thủy tinh.
  - Dung dịch acid ascobic (AA) 0,1M.
  - Tác nhân kết hợp (TNKH) được trộn các dung dịch theo tỷ lệ:
    - + 50 ml  $H_2SO_4$  5N.
    - + 5 ml dung dịch kaliantimonyl tetrat + 15 ml dung dịch amoni molipdat.
    - + 30 ml dung dịch acid ascobic 0,1M lắc kỹ.
- Sau đó, trộn từng tác nhân theo trật tự trên. Dung dịch thu được gọi là tác nhân kết hợp. Dung dịch này ổn định trong vòng 4 tiếng đồng hồ.

- Dung dịch  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  gốc (50 mg  $\text{PO}_4^{3-}$  P/l).
- Dung dịch  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  làm việc (2,50 mg  $\text{PO}_4^{2-}$  P/l).

## 2.2. Phương pháp nghiên cứu

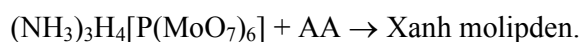
### a) Phương pháp xác định photphat

Nguyên tắc: Photphat được xác định nhờ đường chuẩn trắc quang hợp chất màu xanh molipden dựa theo nguyên tắc:

- Ta chuyển P các dạng về octo - photphat bằng dung dịch  $\text{HNO}_3$ .
- Thực hiện phản ứng tạo kết tủa axit heteropoly photphat molipdat (màu vàng):



- Phản ứng khử của axit ascobic tạo hợp chất màu xanh molipden:



Để tạo ra hợp chất có màu xanh molipden thì phản ứng cần được thực hiện ở các điều kiện tối ưu về pH, các yếu tố cản trở, tỷ lệ TNKH/photphat, bước sóng hấp thụ...

### b) Xây dựng đường chuẩn sự phụ thuộc mật độ quang và nồng độ photphat

Tiến hành: Chuẩn bị 7 dung dịch chuẩn, có nồng độ khoảng 0,20 - 1,25 mg  $\text{PO}_4^{3-}$  P/l. Phản ứng tạo màu ở các điều kiện tối ưu. Đo màu ổn định, đo quang của tất cả dung dịch tạo màu trên máy UV - Vis Biochrom Ltd, ở giá trị  $\lambda_{\text{max}}$  đã được chọn và đường chuẩn bị thiết lập. Dung dịch nền được chuẩn bị tương tự nhưng không có ion photphat.

### c) Đánh giá độ chính xác của đường chuẩn

Ta chuẩn bị một số dung dịch photphat đã biết và xác định chính xác nồng độ. Sau đó tiến hành tạo phản ứng màu và xác định chính xác lại nồng độ theo đường chuẩn nhiều lần, sau đó xử lý bằng thống kê toán học các kết quả đo được.

## 2.3. Phương pháp xử lý photphat trong mẫu nước thải

Có nhiều phương pháp xử lý photphat trong nước mặt và nước thải. Hiện nay, phương pháp xử lý theo công nghệ sinh học được coi là những phương pháp mới có nhiều ưu việt, dễ xử lý, kinh tế, thân thiện với môi trường. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra phương án xử lý photphat bằng bèo tây hiện có ở Việt Nam.

### a) Công tác chuẩn bị bèo tây

Bèo tây ở Việt Nam có tên Latin là *Eichhornia Crassipes* Solms, nó thuộc họ Lục bình (*Pontederiaceae*), còn gọi là bèo sen. Bèo tây thuộc loại thân cỏ, nó sống nổi trên mặt

nước, chúng sinh sản rất nhanh, sống lâu, sản lượng cao, thích hợp với khí hậu nhiệt đới. Bèo tây có thể sinh sản, sinh trưởng tốt ở nhiệt độ 15 - 45°C và phát triển nhanh ở nhiệt độ 25 - 35°C. Ở Việt Nam, bèo tây sống quanh năm và phát triển tốt nhất trong khoảng tháng 4 - tháng 8 [1].

Bèo được chọn làm thí nghiệm là bèo bánh tẻ, lấy từ các hồ, ao đưa về phòng thí nghiệm (không lấy bèo già), loại bỏ những bèo héo, rách. Ta nuôi thả trong thùng phuy nhựa nước sạch trong 3 - 5 ngày, sau đó vớt bèo ra và để ráo nước tự nhiên rồi cân khối lượng bèo ban đầu, nuôi thả trong thùng phuy nước thải.

#### ***b) Công tác chuẩn bị mẫu nước thải***

Chọn mẫu nước thải tại sông Tô Lịch, khu vực chọn là Ngã Tư Sở, nơi tập trung nhiều nguồn nước thải và được lấy mẫu ở các thời điểm khác nhau theo mùa trong năm. Lấy một phần mẫu nước sông Tô Lịch đem đi phân tích ngay, để đánh giá một số thông số (pH, DO) và quan trọng nhất là hàm lượng photphat ban đầu. Một phần mẫu được bảo quản lạnh trong chai ở nhiệt độ 4°C và lấy khoảng 30 l nước dòng Tô Lịch bảo quản thường như ta nuôi bèo để làm công tác đối chứng, so sánh, phần nước còn lại đổ vào thùng phuy để nuôi bèo.

#### ***c) Công tác nuôi bèo và phân tích mẫu***

Chuẩn bị mỗi đợt thí nghiệm nuôi bèo ở 3 thùng phuy, có hệ thống che mưa cẩn thận. Thể tích nước nuôi bèo xác định là 140 l. Hằng ngày, lấy mẫu phân tích xác định hàm lượng photphat. Khi lấy mẫu cần bổ sung thêm nước cất để đảm bảo thể tích đúng 140 l. Đối với các mẫu đối chứng (bảo quản lạnh và bảo quản thường) được tiến hành phân tích đánh giá cá thông số pH, DO, đặc biệt là hàm lượng photphat tại thời điểm kết thúc thí nghiệm để so sánh, đối chứng.

#### ***d) Công tác phân tích mẫu xác định chính xác nồng độ photphat***

Lấy 600 ml mẫu, lọc loại bỏ các huyền phù có trong mẫu, thu lấy khoảng 450 - 500 ml (DD°).

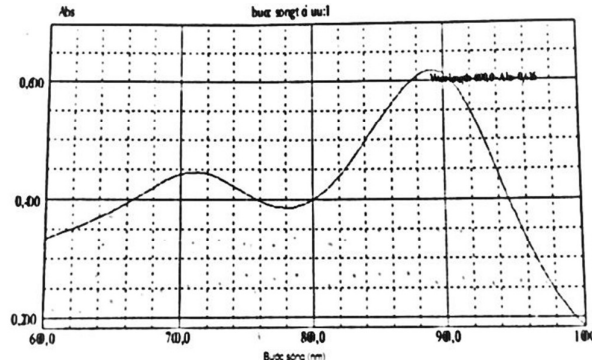
Hút 5 ml DD° cho vào bình định mức 50 ml, thêm vào 35 - 40 ml nước cất, lắc đều. Thêm 1 g chỉ thị phenolphtalein, nếu thấy xuất hiện màu hồng nhạt thì cần phải trung hòa ngay bằng dung dịch H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> 5N đến khi dung dịch mất màu. Ta thêm vào 8,0 ml dung dịch TNHK, lắc kỹ, thêm nước cất đến vạch. Đợi cho màu phát triển thích hợp, ta xác định nồng độ photphat theo đường chuẩn.

Nếu màu quá nhạt hoặc quá đậm thì cần tăng hoặc giảm thể tích dung dịch DD° sao cho nồng độ photphat nằm trong khoảng tuyến tính của đường chuẩn. Các phép phân tích trên đều phải tiến hành 3 - 4 lần và lấy kết quả trung bình.

### 3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

#### 3.1. Kết quả đo phổ hấp thụ của hợp chất màu xanh molipden

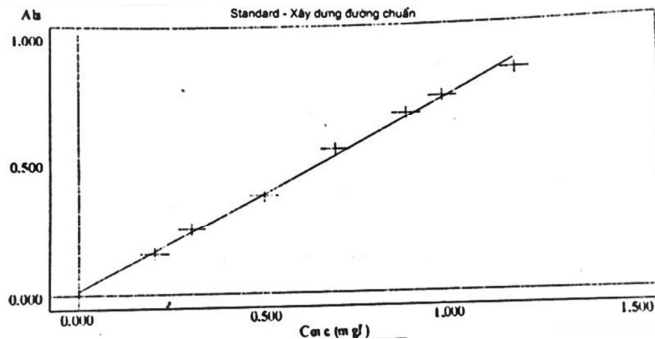
Từ phổ ở Hình 1, ta thu được giá trị  $\lambda_{\max} = 890 \text{ nm}$ .



Hình 1. Phổ hấp thụ của hợp chất màu xanh molipden khi nồng độ  $\text{PO}_4^{3-} - \text{P}$  là  $0,90 \text{ mg/l}$

#### 3.2. Kết quả xây dựng đường chuẩn

Kết quả đường chuẩn được xây dựng ở các điều kiện tối ưu và tại các bước sóng  $\lambda_{\max} = 890 \text{ nm}$ , có các thông số slope:  $0,73730$ , intercep:  $0,016$ , line quality:  $99,7\%$ , tuyến tính trong khoảng nồng độ  $0,20 - 1,25 \text{ mg Po}_4^{3-} \text{ P/l}$  (Hình 2).



Hình 2. Đường chuẩn sự phụ thuộc mật độ quang vào nồng độ photphat

#### 3.3. Đánh giá độ tin cậy của đường chuẩn

Kết quả đánh giá độ chính xác của đường chuẩn được trình bày ở Bảng 1.

Bảng 1. Kết quả đánh giá độ chính xác của đường chuẩn

Nồng độ lý thuyết ( $\text{mgPO}_4^{3-} - \text{P/l}$ )	Nồng độ xác định lại theo đường chuẩn ( $\text{mg PO}_4^{3-} - \text{P/l}$ )	Sai số %
0,35	$0,30 \pm 0,01$	$\pm 3,34$
0,50	$0,50 \pm 0,01$	$\pm 2,00$
0,80	$0,80 \pm 0,01$	$\pm 1,26$

Sai số tương đối nằm trong phạm vi cho phép. Do đó, đường chuẩn thiết lập là đáng tin cậy, có thể dùng để xác định nồng độ photphat trong các mẫu phân tích.

### 3.4. Kết quả xử lý mẫu nước thải bèo tây (Tháng 8/2016)

Kết quả theo dõi các thông số pH, DO và sự phát triển của bèo trong quá trình xử lý nước thải được trình bày ở Bảng 2.

**Bảng 2.** Theo dõi thông số pH, DO và sự phát triển của bèo

TT	Thời gian (Ngày)	Khối lượng (Kg)	Cảm quan	pH	DO (mg/l)
1	0	2,45	Độ đục, màu, mùi đều giảm, nước thải trong hơn so với ban đầu	8,30	2,50
2	8	2,90		7,48	6,70
3	10	2,95		7,43	7,20

**Bảng 3.** Kết quả xác định nồng độ photphat trung bình trong mẫu nước thải khi xử lý bằng bèo

TT	Thời gian (ngày)	Mg PO <sub>4</sub> <sup>3-</sup> (P/l)
1	0	3,70
2	2	2,80
3	3	1,59
4	5	0,54
5	7	0,085
6	9	0,04
7	11	0,020

Nhận xét kết quả tại Bảng 2 và 3 cho ta thấy: Trong quá trình nuôi bèo, màu, mùi của nước thải giảm rõ rệt, nước trong hơn, độ đục, độ nhớt giảm, chỉ tiêu DO tăng mạnh, ít thay đổi, nồng độ ion photphat thì giảm nhanh. Sau 7 ngày nuôi bèo, nồng độ photphat trong nước giảm còn 0,085 mg (PO<sub>4</sub><sup>3-</sup> P/l) và sau 9 ngày chỉ còn 0,04 mg (PO<sub>4</sub><sup>3-</sup> P/l). Trị số này đã đạt dưới mức tiêu chuẩn chất lượng nước dùng cho sinh hoạt của WHO (0,4 mg PO<sub>4</sub><sup>3-</sup> P/l). Đặc biệt sau 11 ngày, nồng độ photphat trong nước thải chỉ còn 0,02 (PO<sub>4</sub><sup>3-</sup> P/l) đạt tiêu chuẩn quy định của Cục Môi trường Mỹ ((US - EPA - 1986) và bây giờ law US - EPA - 2010).

**Bảng 4.** Kết quả phân tích xác định nồng độ photphat trong mẫu nước thải được xử lý và không xử lý bằng bèo (các mẫu đối chứng)

TT	Thời gian (ngày)	Mẫu bảo quản thường (mg PO <sub>4</sub> <sup>3-</sup> P/l)	Mẫu bảo quản lạnh (mg PO <sub>4</sub> <sup>3-</sup> P/l)	Mẫu nuôi bèo (mg PO <sub>4</sub> <sup>3-</sup> P/l)
1	0	3,72	3,72	3,72
2	7	3,76	3,74	0,084
3	9	3,80	3,72	0,04
4	11	3,76	3,71	0,02

*Nhận xét kết quả:* So sánh sự biến đổi nồng độ photphat trong mẫu nước thải được xử lý và không xử lý bằng bèo. Kết quả cho thấy nồng độ photphat trong mẫu được xử lý và không xử lý bằng bèo và mẫu đối chứng được trình bày ở Bảng 4. Qua kết quả, ta thấy các mẫu đối chứng không được xử lý bằng bèo thì nồng độ photphat gần như không thay đổi, đặc biệt là khi bảo quản lạnh. Điều đó chứng tỏ các quá trình tự nhiên không thể tự làm sạch và thấy rõ tác dụng của bèo trong việc xử lý ion photphat.

#### 4. KẾT LUẬN

Đã sử dụng được đường chuẩn trắc quang để xác định hàm lượng photphat trong mỗi nước thải ở các thời điểm lấy mẫu khác nhau trong quá trình nuôi bèo và so sánh với các mẫu không được xử lý. Từ đó, ta thấy được tác dụng của bèo trong việc xử lý ion dinh dưỡng, chống hiện tượng phú dưỡng của nước mặt và nước thải dân dụng.

Đã nghiên cứu xử lý ion photphat trong nước thải bằng cây bèo tây. Kết quả thực nghiệm cho thấy chỉ cần 2,45 kg bèo tây, trong thời gian 7 - 11 ngày đã xử lý được 140 l nước thải (có nồng độ 3,72 mg PO<sub>4</sub><sup>3-</sup> P/l). Với kết quả này, ta có thể mở rộng hướng nghiên cứu sử dụng bèo và các loại cây thủy sinh khác để ứng dụng và xử lý tình trạng phú dưỡng tại các ao, hồ... các khu dân cư đô thị trong và ngoài thành thị.

#### 5. KIẾN NGHỊ MỘT SỐ GIẢI PHÁP GIẢM THIỂU

Cùng với sự phát triển của đất nước, quá trình xây dựng và đô thị hoá ngày càng nhiều, đặc biệt là các thành phố lớn và các khu công nghiệp, việc xả thải ngày càng lớn, dẫn đến sự ô nhiễm môi trường nghiêm trọng. Đặc biệt là nước thải dân dụng, trên cơ sở nghiên cứu khoa học, chúng tôi xin đề xuất một số biện pháp sau:

1. Tuyên truyền giáo dục và bảo vệ môi trường, giúp người dân nhận thức được tác hại của việc xả thải không đúng quy định.

2. Tăng cường nạo vét, khơi thông dòng chảy đối với dòng sông (sông Tô Lịch ở Hà Nội). Đối với các ao hồ cần hút bùn định kỳ, giữ gìn nguồn nước mặt, tạo điều kiện cho khả năng hoà tan oxy là tốt nhất.

3. Khi nguồn nước thải đó bị phú dưỡng thì cần phải xử lý ngay bằng phương pháp sinh học rẻ tiền, thân thiện với môi trường, đó là: thả bèo tây theo từng khu vực bị ô nhiễm (to hay nhỏ tùy thuộc vào diện tích khu vực nước thải mà ta xây dựng các bè nổi đẹp, tạo cảnh quan môi trường).

4. Xây tạo dựng các tháp oxy hoá, bơm oxy định kỳ để đảm bảo lượng oxy hoà tan.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Hoàng Hộ (1993), *Cây cỏ Việt Nam*, Montreal, tr. 580.
2. Jean Louis BRAULT (1999), *Sổ tay xử lý nước, tập 1, 2*, Tài liệu dịch từ tiếng Pháp (Memento Technique de Leau), Nxb. Xây dựng.
3. US-EPA (US-Environment Protection Agency), *Water and Environment Analysis*.
4. APHA-AWWA-WEF (2000), *Standard Methods for the Examination of the Water and Wastewater*, 19<sup>th</sup> Edition 1995, Washington D.C.
5. Water resource Characterization DDS - Phosphorus.  
(<http://h2osparc.-wqncsu.edu./info/phos.html>) P. 2 of 5.

### STUDY THE TREATMENT OF PHOSPHORUS ION IN WASTE WATER BY BIOLOGICAL METHOD - PROPOSE SOME REDUCTION SOLUTION

**Abstract:** *Water is one of the basic factor of the human body's development, animals, plants, other industrial productions and services. However, after using water resources all become wastewater and polluted at different levels. One of the waste causes that pollutes the water source. They are nutrient-rich ions containing nitrogen and phosphorus. It directly enters the water source from the ion or they are produced in different digestive tracts. In this article, we investigated the treatment of orthophosphates in wastewater of the Tô Lịch River by a plant species known as the "Eichornia Crassipipes Solms".*

*Determination of orthophosphate ion before, after and after treatment is carried out by spectroscopic method with two reactants such as molybdenum / adsorbed at  $\lambda = 890$  nm. The results of crop resource analysis allow for very good wastewater treatment and eutrophication*

**Keywords:** *Phosphorus contamination.*

$l^+l^- \rightarrow \gamma h$  COLLISION IN THE RANDALL – SUNDRUM MODEL

Dao Thi Le Thuy<sup>1</sup>, Le Nhu Thuc<sup>1</sup>  
Nguyen Thi Nhung<sup>2</sup>, Dang Trong Hoa<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Hanoi National University of Education

<sup>2</sup>Graduate students – 26<sup>th</sup> course – Faculty of Physics – HNUE

**Abstract:** The production of the Higgs boson and photon from the  $l^+l^-$  collision when beams  $l^+, l^-$  are unpolarized and polarized are studied in detail in the Randall – Sundrum model (RS). Based on the results, we show that the advantageous direction to observe Higgs boson is the same direction of the lepton  $l^-$  or antilepton  $l^+$ . And at the high energy region, the total cross-section changed very small when the collision energy  $\sqrt{s}$  increased. We also obtained the value of cross section of the Higgs boson production in  $e^+e^-$  collision is smaller than  $\mu^+\mu^-$  collision.

**Keywords:** lepton, Higgs, Randall – Sundrum model.

Email: thuydtl@hnue.edu.vn

Received 15 July 2017

Accepted for publication 10 September 2017

## 1. INTRODUCTION

Almost all existing experimental data is described successfully by the Standard Model of electroweak. However this model suffers from many theoretical drawbacks, one of these is the hierarchy problem. Namely, the Standard Model can not consistently accommodate the weak energy scale (about 1 TeV) and a much higher scale such as the Planck scale (about  $10^{19}$  GeV). Therefore, it is commonly believed that the Standard Model is only an effective theory emergings as the low – energy limit of some more fundamental high – scale theory. Recently, it was pointed out that the existence of extra – dimensions could be a solution of the hierarchy problem [7]. The Randall – Sundrum model (RS) is one of the most attractive attempts [1].

RS was given by Randall and Sundrum in 1999 to solve the hierarchy problem of the Standard Model. It involves a finite five – dimensional bulk that is extremely warp and contains two branes: the Planck brane (also called Gravity brane – where gravity is a relatively strong force) and TeV brane (also called weak brane, studied with the Standard Model particles). In this model, the two branes are separated in the not – necessarily large fifth dimension by approximately 16 units (the units based on the brane and bulk energies). The Planck brane has positive brane energy, and the Tevbrane has negative brane energy.



These energies are the cause of the extremely warped spacetime. In this warped spacetime that is only warped along the fifth dimension, the graviton's probability function is extremely high at the Planck brane, but it drops exponentially as it moves closer towards the TeV brane. In this, gravity would be much weaker on the TeV brane than on the Planck brane.

In order to obtain a consistent solution to the Einstein equations corresponding to a low – energy effective theory on the visible brane with a flat metric, the branes must have equal but opposite cosmological constants and these must be precisely related to the bulk cosmological constant. The RS is defined by the 5D action [1]:

$$S = -\int d^4x dy \sqrt{-\hat{g}} \left( \frac{R}{16\pi G_5} + \Lambda \right) + \int d^4x \sqrt{-g_{hid}} (\mathcal{L}_{hid} - V_{hid}) + \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} (\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}), \quad (1)$$

where  $\hat{g}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  is the bulk metric with  $\hat{\mu}, \hat{\nu} = \overline{0,4}$ , and 4 refers to the y coordinate; when  $y = 0$ , the bulk metric with the hidden brane is  $g_{hid}^{\mu\nu}(x)$ , and when  $y=1/2$ , the bulk metric with the visible brane is  $g_{vis}^{\mu\nu}(x)$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ).

The 5 – dimensional warped metric is given by [1]:

$$ds^2 = e^{-2\sigma(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - b_0^2 dy^2, \quad (2)$$

Where  $\sigma(y) = m_0 b_0 [y(2\theta(y)-1) - 2(y-1/2)\theta(y-1/2)]$  and  $b_0$  is a constant parameter. Gravitational fluctuations around the above background metric will be defined through the replacements:

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}(x, y); b_0 \rightarrow b_0 + b(x). \quad (3)$$

Based on the theories of Randall – Sundrum model, we have necessary constants to complete next section. In this paper, we study the production of the Higgs boson and photon at  $e^+e^-$ ,  $\mu^+\mu^-$  collider.

This paper is organized as follows: In Sec.2, we have interaction vertices between lepton, antilepton, photon and Higgs boson in the Randall Sundrum model. In addition, we also calculate results from production of the Higgs boson in the collider and show our numerical results with discussion. And our conclusions in Sec.3.

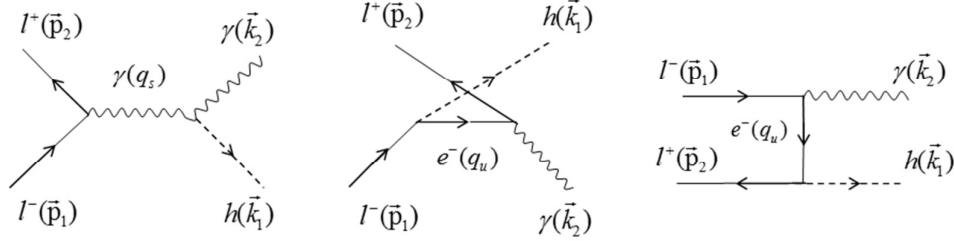
## 2. $l^+l^- \rightarrow \gamma h$ COLLISIONS IN RANDALL – SUNDRUM MODEL

We are interested in the production of Higgs boson and photon from the  $l^+, l^-$  colliders in the high energy,

$$l^-(\vec{p}_1) + l^+(\vec{p}_2) \rightarrow h(\vec{k}_1) + \gamma(\vec{k}_2) \quad (4)$$

Here  $\vec{p}_i, \vec{k}_i$  stand for the momentum of the particle, respectively.

There are three Feynman diagrams contributing to reaction (4), representing the s, u, t – channel exchange depicted in Figure 1.



**Figure 1.** The Feynman diagrams  $l^+l^- \rightarrow \gamma h$  collision.

Use Feynman rules, the matrix element for process  $l^+l^- \rightarrow \gamma h$  can be written as the following cases:

+ For s – channel:

$$M_s = -i \frac{e.c_\gamma}{q_s} [(k_2 q_s) g^{\nu\alpha} - k_2^\nu q_s^\alpha] \times \varepsilon_\alpha^*(\vec{k}_2) \bar{v}(\vec{p}_2) \gamma_\nu u(\vec{p}_1), \quad (5)$$

$$M_{sLL} = -i \frac{e.c_\gamma}{2q_s} [(k_2 q_s) g^{\nu\alpha} - k_2^\nu q_s^\alpha] \times \varepsilon_\alpha^*(\vec{k}_2) \bar{v}(\vec{p}_2) (1 + \gamma_5) \gamma_\nu u(\vec{p}_1), \quad (6)$$

$$M_{sRR} = -i \frac{e.c_\gamma}{2q_s} [(k_2 q_s) g^{\nu\alpha} - k_2^\nu q_s^\alpha] \times \varepsilon_\alpha^*(\vec{k}_2) \bar{v}(\vec{p}_2) (1 - \gamma_5) \gamma_\nu u(\vec{p}_1), \quad (7)$$

+ For u – channel:

$$M_u = -i \frac{e.g.m_e}{2m_w(q_u^2 + m_e^2)} (d + \gamma b) \varepsilon_\nu^*(\vec{k}_2) \bar{v}(\vec{p}_2) \gamma^\nu (\hat{q}_u + m_e) u(\vec{p}_1), \quad (8)$$

$$M_{uLL} = -i \frac{e.g.m_e^2}{4m_w(q_u^2 + m_e^2)} (d + \gamma b) \varepsilon_\nu^*(\vec{k}_2) \bar{v}(\vec{p}_2) (1 + \gamma_5) \gamma^\nu u(\vec{p}_1), \quad (9)$$

$$M_{uRR} = -i \frac{e.g.m_e^2}{4m_w(q_u^2 + m_e^2)} (d + \gamma b) \varepsilon_\nu^*(\vec{k}_2) \bar{v}(\vec{p}_2) (1 - \gamma_5) \gamma^\nu u(\vec{p}_1), \quad (10)$$

$$M_{uLR} = -i \frac{e.g.m_e}{4m_w(q_u^2 + m_e^2)} (d + \gamma b) \varepsilon_\nu^*(\vec{k}_2) \bar{v}(\vec{p}_2) (1 + \gamma_5) \gamma^\nu \hat{q}_u u(\vec{p}_1), \quad (11)$$

$$M_{uRL} = -i \frac{e.g.m_e}{4m_w(q_u^2 + m_e^2)} (d + \gamma b) \varepsilon_\nu^*(\vec{k}_2) \bar{v}(\vec{p}_2) (1 - \gamma_5) \gamma^\nu \hat{q}_u u(\vec{p}_1). \quad (12)$$

+ For  $t$  – channel:

$$M_t = -i \frac{e.g.m_e}{2m_w(q_t^2 + m_e^2)} (d + \gamma b) \varepsilon_\mu^*(\vec{k}_2) \bar{v}(\vec{p}_2) (\hat{q}_t + m_e) \gamma^\mu u(\vec{p}_1), \quad (13)$$

$$M_{tLL} = -i \frac{e.g.m_e^2}{4m_w(q_t^2 + m_e^2)} (d + \gamma b) \varepsilon_\mu^*(\vec{k}_2) \bar{v}(\vec{p}_2) (1 + \gamma_5) \gamma^\mu u(\vec{p}_1), \quad (14)$$

$$M_{tRR} = -i \frac{e.g.m_e^2}{4m_w(q_t^2 + m_e^2)} (d + \gamma b) \varepsilon_\mu^*(\vec{k}_2) \bar{v}(\vec{p}_2) (1 - \gamma_5) \gamma^\mu u(\vec{p}_1), \quad (15)$$

$$M_{tLR} = -i \frac{e.g.m_e}{4m_w(q_t^2 + m_e^2)} (d + \gamma b) \varepsilon_\mu^*(\vec{k}_2) \bar{v}(\vec{p}_2) (1 + \gamma_5) \hat{q}_t \gamma^\mu u(\vec{p}_1), \quad (16)$$

$$M_{tRL} = -i \frac{e.g.m_e}{4m_w(q_t^2 + m_e^2)} (d + \gamma b) \varepsilon_\mu^*(\vec{k}_2) \bar{v}(\vec{p}_2) (1 - \gamma_5) \hat{q}_t \gamma^\mu u(\vec{p}_1). \quad (17)$$

Using these matrix elements, we evaluate the differential and total cross – section for Higgs boson and photon production in the  $l^+l^-$  collider in the next section.

In this section, we present the numerical results for differential and total cross – section for Higgs boson production in the  $e^+e^-$ ,  $\mu^+\mu^-$  collider when the  $e^+$ ,  $e^-$ ,  $\mu^+$ ,  $\mu^-$  beams are polarized and not polarized. We use the expression of the cross – section:

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{k}|}{|\vec{p}|} |M|^2, \quad (18)$$

with  $M$  is the matrix element,  $d\Omega = d(\cos\theta)d\varphi$ ;  $\theta \in [0, \pi]$ ;  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . We assess the number, make the identification and evaluation of the results obtained from the dependence of the differential cross – section by  $\cos\theta$  and the total cross – section fully follows  $\sqrt{s}$ . We choose:

$$m_e = 0,00051 \text{ GeV}; m_w = 80 \text{ GeV}; m_\gamma = 0; m_\mu = 0,1055 \text{ GeV};$$

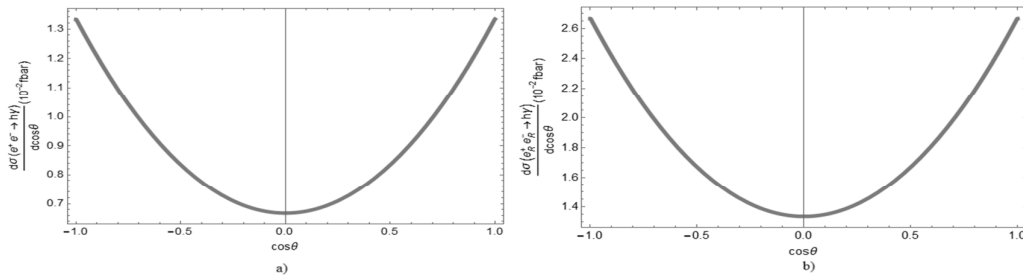
$$m_h = 120 \text{ GeV}; \alpha = \frac{1}{137}, e = \sqrt{4\pi\alpha}; g = 0.634; \xi = 1/6;$$

$$Z = \sqrt{(1 + 6\xi\gamma^2(1 - 6\xi))}; \tan 2\theta = \frac{12\gamma\xi Z m_h^2}{m_h^2(Z^2 - 36\xi^2\gamma^2) - m_\phi^2};$$

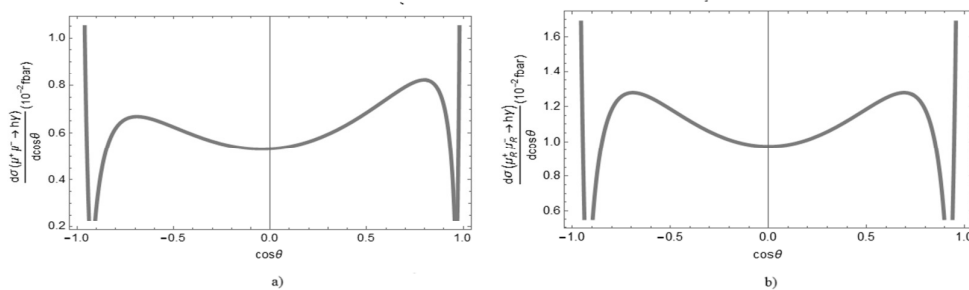
$$a = \frac{\cos\theta}{Z}; c = \sin\theta - \frac{6\xi\gamma}{Z} \cos\theta.$$

We obtain some estimates for the cross – section as following:

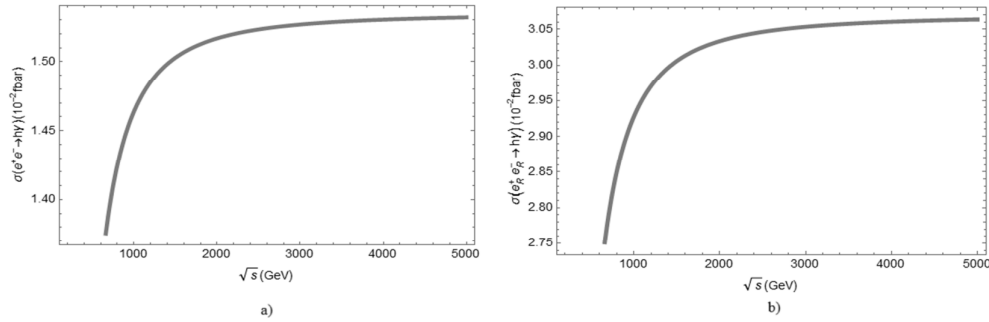
i) In Fig.2, Fig.3, we plot the differential cross – section as a function of  $\cos\theta$  with collision energy  $\sqrt{s} = 3000\text{Gev}$  (this energy can be done in LHC, in future can up to 14 Tev [3]). In process  $e^+e^- \rightarrow \gamma h$ , the differential cross – section is dependent on  $\cos\theta$  as a parabolic function. The figure 2 indicates that the differential cross – section achieves the minimum value when  $\cos\theta=0$  and the maximum value when  $\cos\theta \approx \pm 0.999$ . We calculated these maximum values below:  $[\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma h)]_{\max} = 1,33329 \times 10^{-2} (fbar)$  when the  $e^+, e^-$  beams are unpolarized and  $[\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma h)]_{p-\max} = 2,66446 \times 10^{-2} (fbar)$  when the  $e^+, e^-$  beams are polarized. Similarly, the figure 3 shows the differential cross – section of process  $\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma h$  achieves the maximum value when  $\cos\theta \approx \pm 0.999$ , these maximum values:  $[\sigma(\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma h)]_{\max} = 43,3696 \times 10^{-2} (fbar)$  when the  $\mu^+, \mu^-$  beams are unpolarized and  $[\sigma(\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma h)]_{p-\max} = 179,017 \times 10^{-2} (fbar)$  when the  $\mu^+, \mu^-$  beams are polarized. Therefore, we see that the differential cross – section when  $e^+, e^-$  or  $\mu^+, \mu^-$  beams are unpolarized is smaller than when the  $e^+, e^-$  or  $\mu^+, \mu^-$  beams are polarized. Besides, we also see that the value of differential cross – section of the Higgs boson production in  $e^+e^-$  collision is smaller than  $\mu^+\mu^-$  collision.



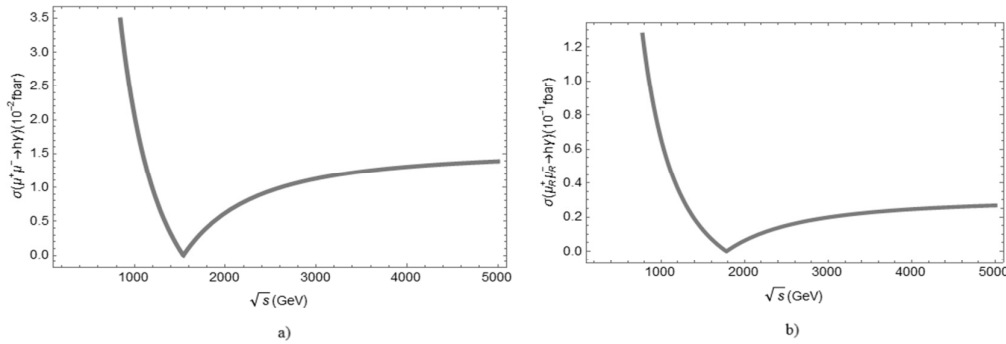
**Figure 2.** Differential cross – section of the process  $e^+e^- \rightarrow \gamma h$  as a function of  $\cos\theta$  when the  $e^+, e^-$  beams are unpolarized and polarized



**Figure 3.** Differential cross – section of the process  $\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma h$  as a function of  $\cos\theta$  when the  $\mu^+, \mu^-$  beams are unpolarized and polarized



**Figure 4.** Total cross – section of the process  $e^+e^- \rightarrow \gamma h$  as a function of the collision energy  $\sqrt{s}$  when the  $e^+, e^-$  beams are unpolarized and polarized



**Figure 5.** Total cross – section of the process  $\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma h$  as a function of the collision energy  $\sqrt{s}$  when the  $\mu^+, \mu^-$  beams are unpolarized and polarized

ii) In Fig.4, Fig.5, we plot total cross – section as function of the collision energy with the collision energy is in the region  $500\text{GeV} \leq \sqrt{s} \leq 5000\text{GeV}$ . The figure 4 shows the total cross – section of  $e^+e^-$  collision is increases when the center of mass energy increases. Namely, the total cross – section increases quickly when  $500\text{GeV} \leq \sqrt{s} \leq 2000\text{GeV}$  (from  $1,30 \times 10^{-2}$  fbar to  $1,6 \times 10^{-2}$  fbar when the  $e^+, e^-$  are not polarized, from  $2,75 \times 10^{-2}$  fbar to  $3,05 \times 10^{-2}$  fbar when the  $e^+, e^-$  are polarized). When  $2000\text{GeV} \leq \sqrt{s} \leq 5000\text{GeV}$ , this total cross – section increases very slowly. Besides, the total cross – section of  $\mu^+\mu^-$  collision decreases quickly when  $500\text{GeV} \leq \sqrt{s} \leq 2000\text{GeV}$  (from  $3,5 \times 10^{-2}$  fbar to  $0,1 \times 10^{-2}$  fbar when the  $\mu^+, \mu^-$  are unpolarized, from  $1,2 \times 10^{-1}$  fbar to  $0,1 \times 10^{-1}$  fbar when the  $\mu^+, \mu^-$  are polarized). Then, this total cross – section increases when  $2000\text{GeV} \leq \sqrt{s} \leq 5000\text{GeV}$ . We see that the total cross – section obtained when  $e^+, e^-$  or  $\mu^+, \mu^-$  beams are unpolarized is smaller than when the  $e^+, e^-$  or  $\mu^+, \mu^-$  beams are polarized, about 3 times. Moreover, the total cross – section of the process  $e^+e^- \rightarrow \gamma h$  is smaller than the total cross – section of the process  $\mu^+\mu^- \rightarrow \gamma h$ , about 3 times.

### 3. CONCLUSION

In this paper, the production of the Higgs boson and photon in the  $l^+l^-$  collider when the  $l^+, l^-$  beams are polarized and unpolarized are calculated, we have obtained that the differential cross – section and total cross – section of the the Higgs boson production when the  $l^+, l^-$  beams are unpolarized is smaller than the  $l^+, l^-$  beams are polarized. The value of cross – section obtained in  $e^+e^-$  collision is smaller than  $\mu^+\mu^-$  collision. Although that, the cross – sections are very small, about  $10^{-2}$  fbar. We also showed that the advantageous direction to see Higgs boson is parallel direction of the initial lepton beam with the antilepton beam.

### REFERENCES

1. D. Dominici, B. Grzadkowski, J. F. Gunion and M. Toharia (2003), “The Scalar sector of the Randall – Sundrum model”, *Nucl. Phys. B* 671, p.243, [arXiv:hep – ph/0206192].
2. Dao Thi Le Thuy, Bui Thi Ha Giang (2016), “  $e^+e^- \rightarrow hZ$  collision in Randall – Sundrum model”, *Communications in Physics*, Vol.26, No.1 (2016), pp.19–24.
3. E. S. Reich (2013), “Physicists plant to build a bigger LHC”, *Nature News, Nature Publishing Group*, Nov 12.
4. L. Randall and R. Sundrum (1999), *Phys. Rev. Lett.* 83, p.3370.
5. Maxime Gabella (June – 2006), *The Randall – Sundrum Model*, University of Oxford.
6. M. Beneke, P. Moch, J. Rohrwild (2016), “ Lepton flavor violation in RS models with a brane – or nearly brane – localized Higgs”, *Nuclear Physics B* 906 (2016) pp.561–614.
7. Ryuichiro Kitano, (2000), “ Lepton Flavor Violation in the Randall – Sundrum Model with Bulk Neutrinos”, [arXiv:hep – ph/0002279v2 16 Mar 2000].

### SỰ VA CHẠM $l^+l^- \rightarrow \gamma h$ TRONG MÔ HÌNH RANDALL – SUNDRUM

**Tóm tắt:** Quá trình sinh Higgs boson và photon từ va chạm  $l^+l^-$  khi chùm  $l^+, l^-$  không phân cực và phân cực trong mô hình Randall – Sundrum (RS) được chúng tôi tính toán chi tiết, từ đó chỉ ra được hướng có lợi để thu được tín hiệu của Higgs trong cùng hướng với hướng của chùm lepton hoặc phản lepton ban đầu. Trong miền năng lượng cao, khi năng lượng va chạm tăng thì tiết diện tán xạ ít thay đổi, bên cạnh đó chúng tôi cũng chỉ ra được giá trị tiết diện tán xạ của sự sinh Higgs từ va chạm  $e^+e^-$  nhỏ hơn va chạm  $\mu^+\mu^-$ .

**Từ khóa:** Hạt Lepton, trường Higgs, mô hình Randall-Sundrum

# VAI TRÒ CỦA SÔNG KA LONG, TỈNH QUẢNG NINH ĐỐI VỚI ẤU TRÙNG VÀ CÁ CON LOÀI *Ambassis vachellii* RICHARDSON, 1846

Tạ Thị Thủy<sup>1</sup>, Hà Mạnh Linh<sup>2</sup>, Nguyễn Hà Linh<sup>3</sup>, Trần Đức Hậu<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Trường Đại học Thủ đô Hà Nội

<sup>2</sup>Trường Đại học Tây Bắc

<sup>3</sup>Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

**Tóm tắt:** Để nghiên cứu sự phân bố của ấu trùng và cá con loài *Ambassis vachellii* ở vùng cửa sông Ka Long tỉnh Quảng Ninh, chúng tôi đã phân tích 18087 mẫu vật thu bằng lưới ven bờ theo từng tháng từ tháng 9 năm 2014 đến tháng 8 năm 2015, trong đó có 2739 mẫu là ấu trùng, cá con loài *A. vachellii* (3,0-51,1 mm chiều dài cơ thể, trung bình 5,7 mm). Các điều kiện của nước ở khu vực nghiên cứu cũng được xác định là có sự thay đổi theo tháng và địa điểm thu mẫu. Trong thời gian thu mẫu, ấu trùng và cá con loài *A. vachellii* xuất hiện nhiều từ tháng 5 đến tháng 10, đây là khoảng thời gian có nhiệt độ cao trong năm. Trong đó, hiệu suất kéo lưới đạt cao nhất vào tháng 10 với 158,3 cá thể trên một lần kéo (2 phút). Trong số 9 địa điểm thu mẫu, ấu trùng và cá con loài *A. vachellii* xuất hiện tập trung với số lượng lớn tại các điểm ở khu vực giữa cửa sông là nơi có độ mặn trung bình (nồng độ muối từ 7,3-29,5‰). Như vậy, cửa sông Ka Long có vai trò quan trọng như là vùng ương dưỡng của ấu trùng, cá con loài cá này.

**Từ khóa:** Ấu trùng và cá con, cửa sông Ka Long, phân bố, *Ambassis vachellii*, Quảng Ninh.

Nhận bài ngày 16.6.2017; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 10.9.2017

Liên hệ tác giả: Tạ Thị Thủy; Email: ttthuy@daihocthudo.edu.vn

## 1. MỞ ĐẦU

*Ambassis vachellii* là một loài thuộc họ Ambassidae, phân bố ở biển, cửa sông và cả nước ngọt, tại khu vực Ấn Độ-Thái Bình Dương [1]. Trên thế giới Ambassidae có khoảng 41 loài thuộc 8 giống. Ở Việt Nam, loài này lần đầu tiên được xác định vào năm 2001 trong nghiên cứu của Kottelat tại Quảng Ninh, năm 2003 được xác định xuất hiện ở Quảng Bình [2], tuy nhiên cả hai nghiên cứu này đều ở giai đoạn cá trưởng thành, chưa có nghiên cứu độc lập nào về phân bố ấu trùng, cá con loài *A. vachellii* tại các cửa sông. Trong nghiên cứu ấu trùng cá con tại cửa sông Tiên Yên, Quảng Ninh và tại cửa sông Sò, tỉnh Nam Định thì ấu trùng và cá con của loài cá này xuất hiện với số lượng lớn [3]. Các nghiên

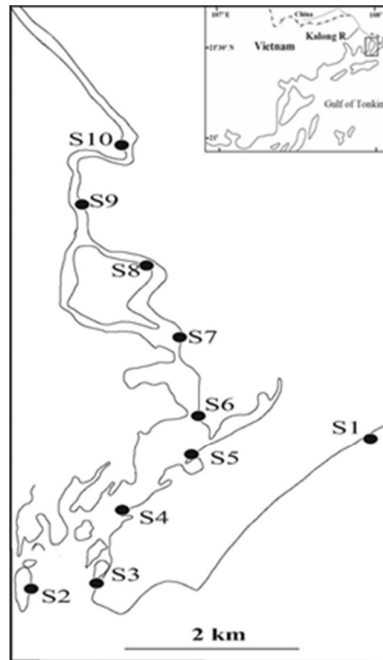
cứu này phần nào cho thấy các cửa sông thuộc khu vực Vịnh Bắc Bộ là môi trường phù hợp cho sự sinh trưởng của *A. vachellii*. Cửa sông Ka Long, tỉnh Quảng Ninh có hình phễu, là sông điển hình của dạng sông ven biển với sự xâm nhập mặn sâu. Tại đây có biên độ thủy triều cao, trung bình từ 3-4 m và hình thành những bãi triều rộng với diện tích lớn nên thành phần giáp xác, thân mềm, cá ở lưu vực này rất phong phú và đa dạng, nhất là các loài cá nước mặn [4]. Với đặc điểm như vậy, cửa sông này có thể trở thành môi trường sống thích hợp cho ấu trùng, cá con của nhiều loài cá.

Thực địa tại cửa sông Ka Long, tỉnh Quảng Ninh, chúng tôi cũng thu được mẫu vật của loài *A. Vachellii* ở 3 dạng: trưởng thành, cá con và ấu trùng. Bài toán này xác định sự phân bố của ấu trùng, cá con loài *A. Vachellii* tại cửa sông Ka Long, tỉnh Quảng Ninh, đồng thời đánh giá mối quan hệ trong sự xuất hiện của loài này với các yếu tố môi trường nước. Từ đó đánh giá vai trò của khu vực nghiên cứu đối với ấu trùng, cá con của loài đồng thời cung cấp dẫn liệu sinh học, sinh thái học để góp phần vào công tác bảo tồn loài cá này.

## 2. NỘI DUNG

### 2.1. Vật liệu và phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu tiến hành điều tra, thu thập mẫu tại 9 địa điểm ven bờ được thiết kế theo sự xâm nhập của thủy triều đi từ ngoài vào trong cửa sông Ka Long, tỉnh Quảng Ninh: S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8, S9, S10 và điểm S1 ở vùng sóng vỗ (bãi biển Trà Cỏ) (Hình 1).



Hình 1. Sơ đồ các địa điểm thu mẫu tại cửa sông Ka Long, Quảng Ninh.



Mẫu được thu vào mỗi tháng từ tháng 9/2014 đến tháng 8/2015. Các mẫu vật được định hình bằng formalin 5% trong 2-3 giờ, sau đó chuyển sang cồn 70<sup>0</sup> trong một ngày, cuối cùng thay bằng cồn 70<sup>0</sup> mới. Tại phòng thí nghiệm, sử dụng kính lúp 2 mắt Nikon bội giác 10-40 để quan sát, đo, đếm và định loại. Định loại cá trưởng thành dựa vào đặc điểm hình thái theo tài liệu: Allen & Burgess (1990) [1], FAO (1999) [5]; giai đoạn ấu trùng được định loại bằng phương pháp “Serries” theo Leis & Trinski (1989) [6].

Các yếu tố môi trường nước (nhiệt độ, nồng độ muối và độ đục) được xác định bằng máy TOA (WQC-22A) đo tại từng địa điểm thu mẫu. Hiệu quả kéo lưới (số cá thể/ một lần kéo lưới, CPUE = Catch Per Unit Effort) được tính bằng số cá thể kéo lưới x 2 phút/ số phút kéo lưới.

## 2.2. Kết quả nghiên cứu và thảo luận

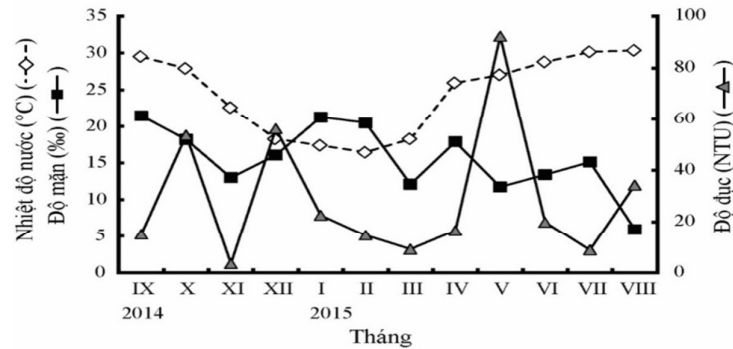
Căn cứ vào kết quả phân tích 18.087 mẫu vật thu được ở ven bờ cửa sông Ka Long, tỉnh Quảng Ninh trong thời gian từ tháng 9/2014 đến tháng 8/2015, chúng tôi đã tách được 2.739 ấu trùng, cá con *A. vachellii* trong khoảng kích thước từ 3,0-51,1 mm, chiều dài cơ thể trung bình 5,7 mm. Mặc dù số lượng mẫu lớn nhưng kích thước chủ yếu tập trung ở giai đoạn ấu trùng, trong khoảng 3-6 mm (chiếm 79,7%). Sự phân bố theo tháng và theo địa điểm bị chi phối nhiều nhất bởi hai yếu tố môi trường nước là nhiệt độ và độ mặn.

### 2.2.1. Sự phân bố ấu trùng cá con *A. vachellii* theo tháng

#### – Đặc điểm các yếu tố môi trường nước theo tháng

Nhiệt độ ở khu vực nghiên cứu (KVNC) biến đổi đồng đều, đặc trưng cho sự biến đổi của nhiệt độ ở miền Bắc. Từ tháng 9/2014 đến tháng 2/2015 nhiệt độ trung bình giảm dần từ 29,5<sup>0</sup>C đến 16,5<sup>0</sup>C (Hình 2). Từ tháng 3 đến tháng 8/2015 nhiệt độ trung bình tăng rõ rệt và đồng đều ở các tháng, từ 18,3<sup>0</sup>C đến 30,4<sup>0</sup>C. Nhiệt độ trung bình thấp nhất là 16,5<sup>0</sup>C và cao nhất là 30,4<sup>0</sup>C, chênh lệch giữa tháng thấp nhất và cao nhất là 13,9<sup>0</sup>C. Nhiệt độ trung bình cao và tăng ổn định vào các tháng mùa mưa (từ tháng 5 đến tháng 8, cao nhất đạt 30,4<sup>0</sup>C ở tháng 8). Trong các tháng mùa khô, nhiệt độ thấp hơn (thấp nhất là 16,5<sup>0</sup>C ở tháng 2) (Hình 2).

Độ mặn ở cửa sông Ka Long qua các tháng thu mẫu có sự thay đổi theo chiều hướng ngược lại với nhiệt độ nước. Nồng độ muối giảm tương đối ổn định từ tháng 9 đến tháng 11/2014 với mức trung bình là 17,6‰, tháng 1/2014 nồng độ muối trung bình đạt cao nhất là 21,3‰, thấp nhất vào tháng 8 với nồng độ là 5,9‰. Như vậy, xu hướng biến thiên nồng độ muối thường là thấp vào các tháng mùa mưa và cao hơn vào các tháng mùa khô.

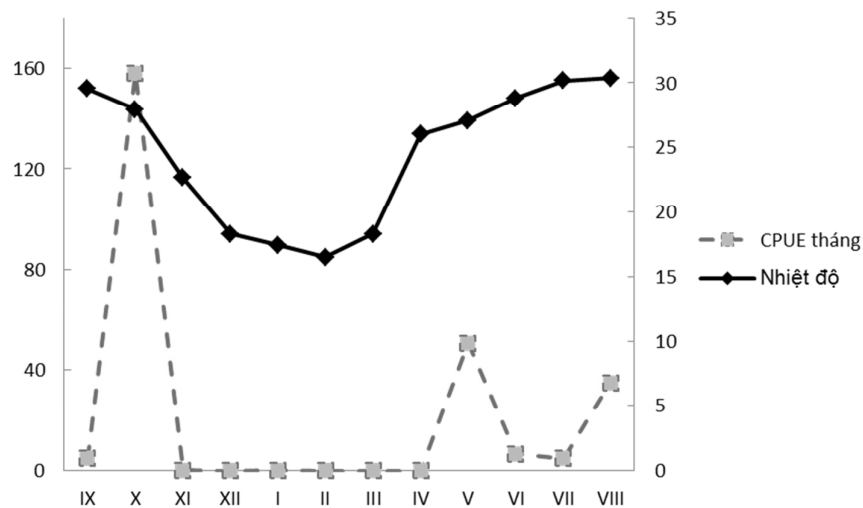


**Hình 2.** Biến động các yếu tố môi trường nước theo thời gian ở cửa sông Ka Long, Quảng Ninh.

Độ đục luôn là điều kiện nước có biên độ dao động lớn nhất ở các nghiên cứu vùng ven bờ của sông nhưng sự thay đổi qua thời gian không rõ ràng. Vì vậy chưa thể xét mối quan hệ giữa độ đục với sự phân bố ấu trùng cá con loài *A. vachellii*.

– Phân bố ấu trùng cá con *Ambassis vachellii* theo tháng

Xét về phân bố theo tháng thì loài chịu sự chi phối lớn nhất bởi nhiệt độ nước. Độ phong phú của ấu trùng loài *A. vachellii* trong mối quan hệ với nhiệt độ môi trường nước ở cửa sông Ka Long, tỉnh Quảng Ninh theo tháng được thể hiện trong hình 3.



**Hình 3.** Biến động theo tháng về CPUE của *Ambassis vachellii* ở cửa sông Ka Long, Quảng Ninh.

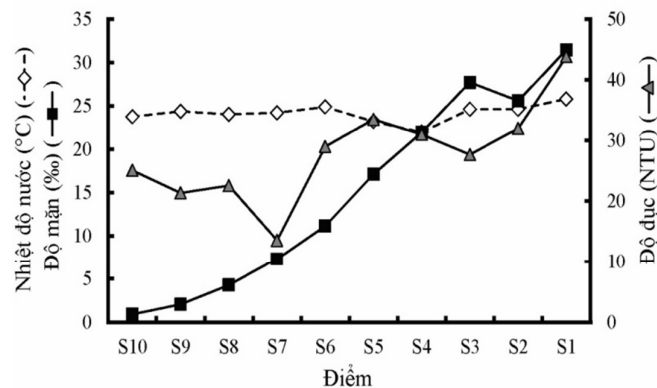
Dựa vào kết quả nghiên cứu có thể thấy vào những tháng có nhiệt độ tương đối cao trong khoảng từ 27-30°C (tháng 5 - 10) có sự xuất hiện của ấu trùng, cá con của loài với số lượng lớn (Hình 3). Có thể thấy hiệu suất kéo lưới cao nhất vào tháng 10 với CPUE =

158,3 (cá thể/2 phút), tiếp theo là tháng 5 với CPUE=50,5 (cá thể/2 phút), tháng 8 với CPUE = 34,8 (cá thể/ 2 phút), các tháng còn lại đều có CPUE < 5. Không thu được mẫu vào các tháng lạnh nhất trong năm (tháng 12 và tháng 2), hoặc thu được rất ít cá thể vào tháng 11 với 4 cá thể, tháng 1 và tháng 3 đều chỉ thu được 1 cá thể, tất cả các cá thể trong 3 tháng này đều ở giai đoạn cá con. Sự phân bố ấu trùng và cá con của loài *A. vachellii* theo tháng trong nghiên cứu này có sự khác biệt với phân bố của loài cá Đục bạc *Sillago sihama* tại cửa sông Tiên Yên. Đó là ấu trùng cá con loài cá Đục bạc xuất hiện nhiều vào tháng 7 và tháng 8 cũng là thời điểm có nhiệt độ tương đối cao trong năm còn *A. vachellii* lại xuất hiện nhiều hơn vào tháng 10 và tháng 5 [7]. Do loài cá Sơn vachen được xác định là cá nhiệt đới, rất thích nghi với nhiệt độ cao, chính vì vậy vào thời gian chịu ảnh hưởng bởi gió mùa Tây Nam nhiệt độ tăng cao, dẫn đến sự xuất hiện ấu trùng cá con của loài nhiều hơn [8]. Dựa vào số lượng mẫu thu được trong các tháng và giai đoạn của chúng phần nào đánh giá được ấu trùng của loài không thích nghi được với điều kiện nhiệt độ thấp.

### 2.2.2. Sự phân bố ấu trùng cá con *A. vachellii* theo điểm thu mẫu

– Đặc điểm các yếu tố môi trường nước theo điểm

Có thể thấy sự thay đổi độ mặn là rõ nhất, theo chiều giảm dần từ ngoài vào trong cửa sông. Độ mặn trung bình thấp nhất tại điểm trong cùng S10 (0,9 ‰) và tăng liên tiếp qua các điểm, điểm S1 (tại bãi biển Trà Cổ) có độ mặn trung bình cao nhất (31,5‰) (Hình 4). Do các điểm từ S2 đến S10 được thiết kế theo sự xâm nhập của thủy triều theo hướng từ biển vào, vì vậy các điểm càng vào sâu trong đất liền độ mặn càng giảm, tiệm cận nước ngọt.



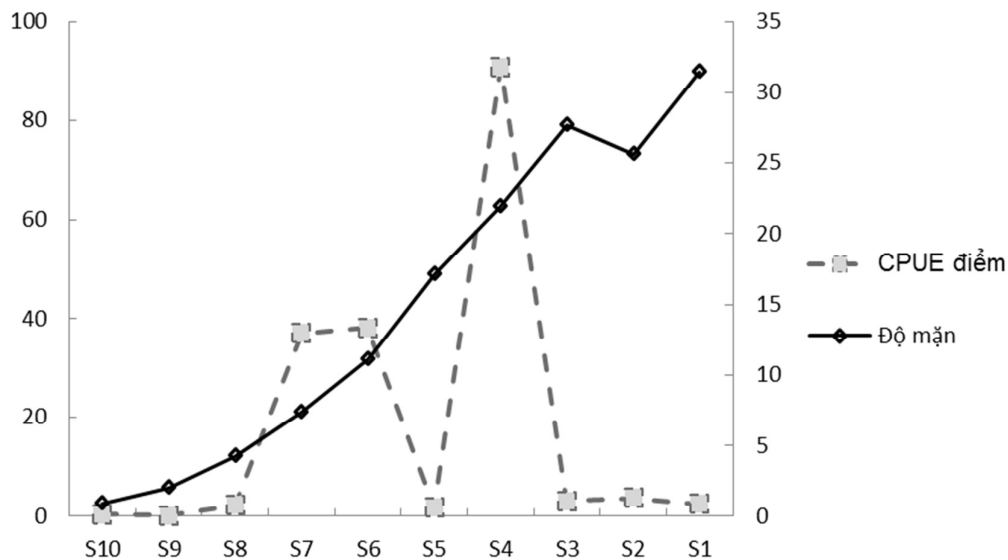
Hình 4. Biến động các yếu tố môi trường nước theo điểm ở cửa sông Ka Long, Quảng Ninh

Yếu tố nhiệt độ của môi trường nước ven bờ cửa sông Ka Long tương đối ổn định ở các điểm. Nhiệt độ trung bình giao động trong khoảng 22-26<sup>0</sup>C. Tại các điểm thu mẫu, độ đục biến thiên lớn nhất tuy nhiên biến đổi phức tạp, không rõ ràng, đường cong biến thiên về độ đục lên xuống không đồng đều, cao nhất ở điểm S1 (44 NTU) và thấp nhất ở S7 (13,5 NTU).

Tại mỗi thời điểm, địa điểm khác nhau trong năm, các yếu tố môi trường nước có các đặc trưng và biến đổi riêng. Những biến động nhỏ xuất hiện tùy thuộc vào điều kiện tự nhiên ở từng tháng và tại từng địa điểm thu mẫu. Các biến động của các yếu tố môi trường nước dù nhỏ nhưng cũng sẽ phần nào ảnh hưởng đến sự xuất hiện giai đoạn sớm của loài *A. vachellii* tại khu vực nghiên cứu.

– Phân bố ấu trùng cá con loài *A. Vachellii* theo điểm thu mẫu

Nhiệt độ ảnh hưởng đến sự phân bố của loài qua các tháng, tuy nhiên sự phân bố tại các địa điểm thu mẫu ở khu vực nghiên cứu bị chi phối bởi yếu tố độ mặn. Hình dưới đây biểu diễn mối quan hệ của độ mặn với sự xuất hiện của loài:

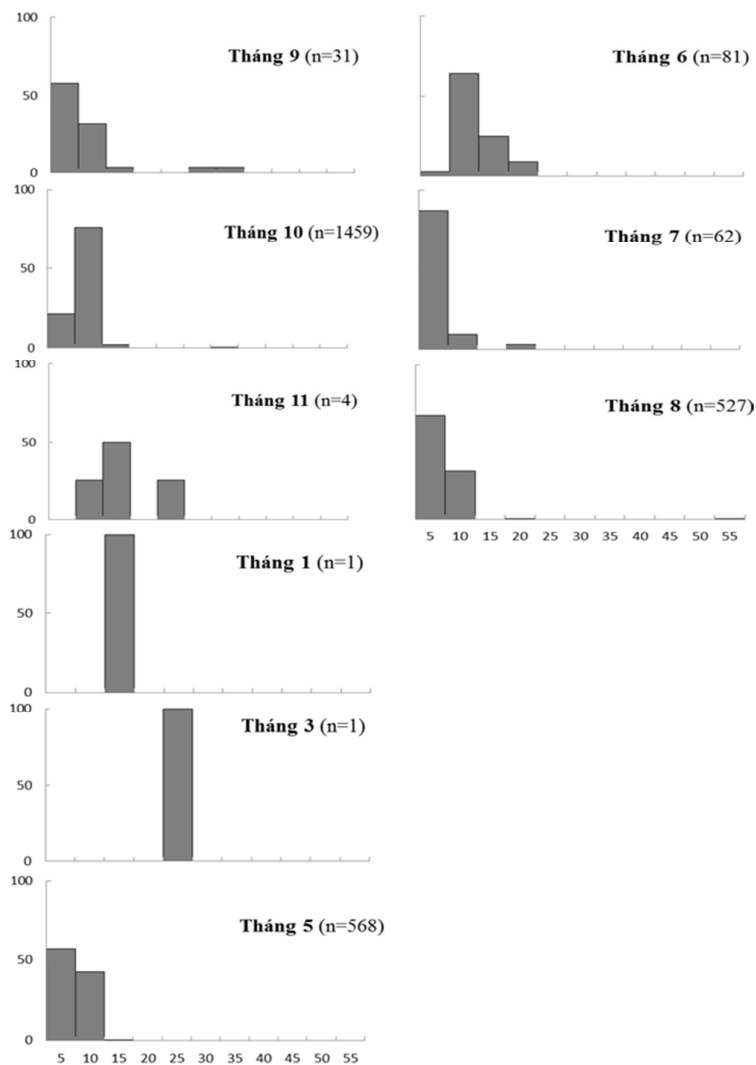


**Hình 5.** Biến động theo tháng về CPUE của *Ambassis vachellii* ở cửa sông Ka Long, Quảng Ninh

Từ kết quả nghiên cứu có thể thấy *A. vachellii* xuất hiện tại tất cả các điểm thu mẫu, vậy đây là loài thích nghi rộng với độ mặn nhưng tập trung với số lượng lớn tại điểm S7-S4; ở S9, S10 thu được rất ít mẫu; điều đó cho thấy giai đoạn sớm của loài này thích nghi với môi trường giữa cửa sông, là nơi có độ mặn trung bình (nồng độ muối từ 7,3-29,5‰), hiệu suất kéo lưới thu được ở các điểm này rất lớn, lớn nhất tại S4 (CPUE=90,9 cá thể/2 phút), tiếp theo là S6 (CPUE=38,1 cá thể/2 phút), S7 (CPUE =37,1 cá thể/ 2 phút). Tuy nhiên, điểm S5 mặc dù giữa cửa sông nhưng số lượng mẫu thu được vào các tháng rất ít (CPUE= 1,72 cá thể/2 phút), có thể do diện tích khu vực điểm S5 rộng hơn hẳn khu vực các điểm S7, S6, S4, lượng chất dinh dưỡng ven bờ ít hơn nên thu được ấu trùng, cá con ít hơn hẳn (Hình 1). Tại điểm đối chứng S1 ở vùng sông vỗ, số lượng ấu trùng cá con loài *A.*

*vachellii* thu được là rất ít so với nhiều điểm ở cửa sông, cho thấy cửa sông Ka Long là môi trường sống thích hợp cho ấu trùng, cá con loài này hơn vùng ven bờ phía ngoài cửa sông. Sự phân bố ấu trùng cá con loài *A. vachellii* trong mối quan hệ với nồng độ muối có sự khác biệt với loài cá Sóc cuvi (*Oryzias curvinotus*) - loài có nồng độ muối phù hợp là từ 1 đến 10‰ [9]. Loài này cũng có giới hạn muối rộng hơn loài cá Đục bạc *Silago sihama* - loài có nồng độ muối phù hợp từ 10 - 20‰ phân bố chủ yếu ở vùng nước giao thoa ở cửa sông và biển [7].

### 2.2.3. Biến đổi kích thước của ấu trùng và cá con của loài qua các tháng



Hình 6. Thay đổi kích thước theo tháng của *Ambassis vachellii* ở ven bờ sông Ka Long, Quảng Ninh

Mặc dù số lượng mẫu lớn nhưng kích thước chủ yếu tập trung ở giai đoạn ấu trùng, trong khoảng 3-6 mm (chiếm 79,7%). Nhận thấy có sự tăng về kích thước các tháng từ tháng 9-11, từ tháng 5-6 và từ tháng 7-8 (Hình 6).

Từ đây có thể kết luận, vùng cửa sông Ka Long là môi trường thích nghi cao đối với giai đoạn sớm loài *A. vachellii* và được loài sử dụng như vùng ương dưỡng của chúng.

### 3. KẾT LUẬN

Sự phân bố 2739 mẫu ấu trùng cá con loài *A. vachellii* thu được tại cửa sông Ka Long, tỉnh Quảng Ninh có sự khác nhau giữa các tháng, giữa các điểm. Ấu trùng cá con xuất hiện gần như quanh năm (trừ tháng 12, tháng 2 và tháng 4), xuất hiện với số lượng lớn vào những tháng có nhiệt độ tương đối cao (tháng 5-10), nhiều nhất vào tháng 10 (CPUE = 158,3 cá thể/ 2 phút). Môi trường ưa thích là những điểm giữa cửa sông (S7-S4) với nồng độ muối trung bình (7,3-29,5‰). Môi trường cửa sông Ka Long được loài lựa chọn như là vùng ương dưỡng của loài.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Allen, G.R. & Burgess, W.E. (1990), "A review of the glass-fishes (Ambassidae) of Australia and New Guinea", *Rec. West. Aust. Mus. Suppl.* 34, pp.139-206.
2. Nguyễn Văn Hào (2005) *Cá nước ngọt Việt Nam* (tập 3), Nxb Nông nghiệp, Hà Nội. Tr.149-162.
3. Phùng Hữu Thịnh, Tạ Thị Thủy, Trần Trung Thành (2016), "Hình thái ấu trùng và cá con của loài *Ambassis vachellii* Richardson, 1846 ở cửa sông Tiên Yên, tỉnh Quảng Ninh", Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội, pp.726-731.
4. Vu, T.T. (2009), *Estuarine ecosystems in Vietnam*. Educational Publishing House, Hanoi.
5. FAO (1999), *The living marine resources of the western central pacific*, Volume 4 Bony fishes part 2 (Mugilidae to Carangidae), pp.2433-2435.
6. Leis, J.M. & Trnski, T. (1989), "The larvae of Indo-Pacific shorefishes, New South Wales" *University Press, Australia*, pp.120-123.
7. Trần Đức Hậu, Nguyễn Hà My, Nguyễn Thị Thịnh (2015), "Phân bố ấu trùng và cá con loài cá Đục bạc (*Sillago sihama*) ở cửa sông Tiên Yên, Quảng Ninh, Việt Nam", *Tạp chí Nông nghiệp & Phát triển nông thôn*, số 17/2015. pp.105-109.
8. Sheaves, M., Johnston, R., Johnson, A., Baker, R., & Connolly, R. M. (2013), "Nursery function drives temporal patterns in fish assemblage structure in four tropical estuaries", *Estuaries and Coasts*, 36: 893-905.
9. Tạ Thị Thủy, Hoàng Thị Thảo, Trần Trung Thành, Trần Đức Hậu (2014), "Phân bố loài cá Sóc cuvi (*Oryzias curvinotus*) ở cửa sông Tiên Yên, Quảng Ninh, Việt Nam", *Tạp chí Khoa học Đại học Quốc gia Hà Nội, Khoa học Tự nhiên và Công nghệ* 30, số 1S: 235-241.

**IMPORTANCE OF KALONG ESTUARY IN QUANG NINH  
PROVINCE FOR LARVAE AND JUVENILES OF *AMBASSIS  
VACHELLII* RICHARDSON, 1846**

**Abstract:** To investigate the distribution of larvae and juveniles of Vachelli's glassfish (*Ambassis vachellii*), we have analyzed 18,087 specimens that were collected in shallow waters of the Ka Long estuary by a small seine net from September 2014 to August 2015. Among them, there were 2739 larvae and juveniles (body length ranged from 3.0 to 51.1 mm, with an average of 5.7 mm) of *Ambassis vachellii*. Measured water conditions were changed monthly and spatially. Amongst 12 months, larvae and juveniles occurred with greater number from May to October with a peak in October (158.3 individuals/haul). Larvae and juveniles of this species appeared mainly at stations in middle of the estuary where the salinities varied from 7.3 to 29.5‰. Thus, the Kalong estuary plays a significant role as a nursery area for larvae and juveniles of this species.

**Keywords:** Larvae and juveniles, Ka Long Estuary, *Ambassis vachellii*, distribution, Quang Ninh Province.

# GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU BẰNG PHƯƠNG PHÁP GRADIENT VÀ ỨNG DỤNG

Nguyễn Quốc Tuấn

Trường Đại học Thủ đô Hà Nội

**Tóm tắt:** Bài báo phân tích phương pháp để giải bài toán tối ưu phi tuyến có ràng buộc bằng phương pháp Gradient cổ điển. Đối với phương pháp gradient cổ điển sử dụng phương pháp hàm chặn để đưa về bài toán phi tuyến không ràng buộc  $\{\min \phi = f + \Psi\}$ , sau đó thực hiện giải bài toán tối ưu phi tuyến không ràng buộc. Trong bài báo cũng đưa ra phương pháp Gradient cải tiến để giải bài toán tối ưu  $\{\min \phi\}$  với hàm  $\Psi$  phức tạp hơn nhiều so với phương pháp gradient cổ điển. Trong bài báo cũng trình bày bài toán phân lớp dữ liệu (SVM), áp dụng phương pháp Gradient để đưa bài toán phân lớp dữ liệu về bài toán tối ưu.

**Từ khóa:** Phương pháp Gradient, Phương pháp Gradient cải tiến, Support vector machine, hàm chặn, tập mẫu.

Nhận bài ngày 18.7.2017; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 10.9.2017

Liên hệ tác giả: Nguyễn Quốc Tuấn; Email: nqtuan@daihocthudo.edu.vn

## 1. MỞ ĐẦU

Lý thuyết tối ưu là một ngành toán học đang phát triển mạnh, và ngày càng có nhiều ứng dụng quan trọng trong mọi lĩnh vực khoa học, kỹ thuật, công nghệ và quản lý hiện đại. Cuộc cách mạng công nghệ thông tin tạo điều kiện thuận lợi để ứng dụng tối ưu hóa một cách rộng rãi và thiết thực. Trong toán học, thuật ngữ tối ưu hóa chỉ tới việc nghiên cứu các bài toán tìm nghiệm tối ưu.

Bài báo phân tích một số phương pháp để giải bài toán tối ưu phi tuyến có ràng buộc. Đối với phương pháp gradient cổ điển sử dụng phương pháp hàm chặn để đưa về bài toán phi tuyến không ràng buộc  $\{\min \phi = f + \Psi\}$ , sau đó thực hiện giải bài toán tối ưu phi tuyến không ràng buộc. Phương pháp gradient cải tiến giải bài toán tối ưu  $\{\min \phi\}$  với hàm  $\Psi$  phức tạp nhiều hơn so với phương pháp gradient cổ điển.

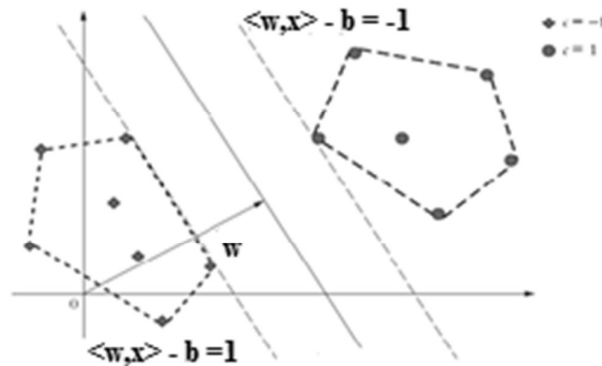
Trong bài báo cũng giới thiệu về bài toán phân lớp dữ liệu dùng phương pháp SVM để đưa bài toán phân lớp dữ liệu về bài toán tối ưu. Sau đó, bài báo trình bày một số tính toán thử nghiệm, ứng với các thuật toán đã được đề xuất.



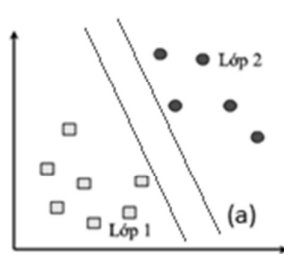
## 2. GIỚI THIỆU VỀ BÀI TOÁN PHÂN LỚP DỮ LIỆU SUPPORT VECTOR MACHINE (SVM)

*Support Vector Machines (SVM)* [1] là kỹ thuật mới đối với bài toán phân lớp dữ liệu, đây cũng là một trong những phương pháp học sử dụng không gian giả thiết các hàm tuyến tính trên không gian đặc trưng nhiều chiều dựa vào lý thuyết tối ưu và lý thuyết thống kê. Trong kỹ thuật *SVM*, không gian dữ liệu nhập ban đầu được ánh xạ vào không gian đặc trưng có xác định mặt siêu phẳng phân chia tối ưu. *SVM* dạng chuẩn nhận dữ liệu vào và phân loại chúng vào hai lớp khác nhau. Do đó, *SVM* là một thuật toán phân loại nhị phân.

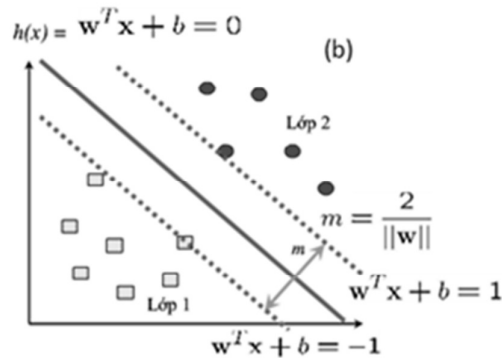
Tập  $D = \{(x_i, c_i), x_i \in R^n, i = 1, 2, \dots, m\}, c_i \in \{-1, 1\}$  được gọi là tập mẫu học. Tập mẫu học tầm thường nếu tất cả các nhãn  $c_i$  có giá trị như nhau. Giả sử tập là phân tách tuyến tính, nghĩa là tập được chia thành hai miền được xác định bởi hai siêu phẳng song song, sao cho mỗi một lớp thuộc về một không miền không gian mà không nằm giữa hai siêu phẳng.



Hình 1. Các siêu phẳng phân tách trong không gian hai chiều.



Hình 2. Siêu phẳng tách.



Hình 3. Siêu phẳng tối ưu.

Phương trình tương ứng của hai siêu phẳng:

$$+) \langle w, x \rangle - b = 1.$$

$$+) \langle w, x \rangle - b = -1.$$

Trong đó:

+)  $w$  gọi là vector pháp tuyến  $n$  chiều.

+)  $b$  là giá trị ngưỡng, xác định khoảng cách giữa hai siêu phẳng và gốc.

Người ta muốn tìm một véc tơ  $W$  sao cho khoảng cách giữa hai siêu phẳng tách là lớn nhất. Điều đó dẫn đến bài toán tối ưu và bài báo sẽ trình bày ở mục 4.

### 3. GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU BẰNG PHƯƠNG PHÁP GRADIENT

#### 3.1. Phương pháp Gradient

##### 3.1.1. Bài toán qui hoạch phi tuyến không ràng buộc

Xét bài toán qui hoạch phi tuyến không ràng buộc: [3]

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

Giả sử rằng  $f$  là hàm khả vi, khi đó điểm cực trị  $x^*$  của  $f$  thỏa mãn:

$$\nabla f(x^*) = 0,$$

Việc trực tiếp giải phương trình  $\nabla f(x) = 0$  rất phức tạp. Do đó cần xây dựng một phương án hiệu quả hơn so với việc giải trực tiếp bài toán  $\nabla f(x) = 0$ .

Ý tưởng của phương pháp này là tìm một dãy phương án chấp nhận được  $\{x_k\}$  hội tụ đến  $x^*$ . Giá trị mới của dãy số tại bước  $k + 1$  được ước tính:

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k,$$

Trong đó, véc tơ  $d_k$  là hướng di chuyển từ  $x_k$  đến  $x_{k+1}$  và độ dài bước di chuyển  $t_k$ .

Để điều kiện:

$$f(x_k) < f(x_{k+1})$$

được bảo đảm tại mỗi giá trị  $x_{k+1}$  mới, thì véc tơ hướng giảm phải thỏa mãn:

$$\langle \nabla f(x_k), d_k \rangle < 0.$$

Khi đó với độ dài bước  $t_k$  đủ bé ta có:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + t_k d_k) = f(x_k) + t_k \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle + o(t_k) < f(x_k),$$

Chọn hướng  $d_k = -\nabla f(x_k)$ . Suy ra:

$$x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k), k = 1, 2, 3, \dots$$

Biểu diễn dưới dạng tọa độ biểu thức trên:

$$(x_i)_{k+1} = (x_i)_k - t_k \partial f(x_k) / \partial x_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Vì tính đơn giản, hiệu quả nên đây là phương pháp phổ biến được sử dụng cho bài toán qui hoạch phi tuyến không ràng buộc. Vấn đề còn lại là lựa chọn  $t_k$  trong mỗi bước tính như thế nào. Thuật toán sau đây đưa ra giá trị ước tính của  $t_k$  tại mỗi bước .

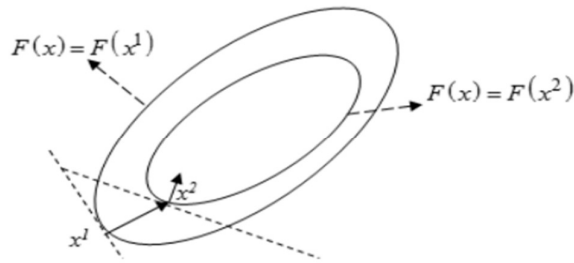
*Bước 0.* Chọn trước một giá trị .

*Bước 1.* Tính  $x = x_k - t \nabla f(x_k)$ ,

*Bước 2.* Kiểm tra:

– Nếu  $f(x) < f(x_k)$ , lấy  $t_k = t$ .

– Ngược lại, đặt  $t = t/2$  và quay lại bước 1.



Hình 4. Ý nghĩa hình học của phương pháp gradient.

### 3.1.2. Bài toán tối ưu có ràng buộc

Xét bài toán tối ưu có ràng buộc: [3]

$$\min_{x \in C} f(x) < f(x_k) \quad (3.1)$$

Để áp dụng các phương pháp giải bài toán tối ưu không ràng buộc, người ta chuyển bài toán tối ưu có ràng buộc về dạng bài toán tối ưu không ràng buộc. Có nhiều phương pháp chuyển đổi như: Phương pháp nhân tử Lagrange, phương pháp hàm chẵn. Ở đây ta sử dụng phương pháp hàm chẵn, bằng cách định nghĩa một hàm chẵn  $\Psi$  là hàm lồi trên tập như sau:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \\ +\infty, & x \notin C. \end{cases}$$

Và thực hiện xét bài toán tối ưu không ràng buộc của hàm được biểu diễn bởi tổng của hai hàm:

$$\min \phi(x) = f(x) + \Psi(x) \quad (3.2)$$

xác định trên tập  $R^n$ . Trong đó,  $f$  khả vi.

Tuy nhiên, ta không thể áp dụng trực tiếp phương pháp gradient vì hàm  $\Psi$  là không khả vi tại biên của  $C$ . Do đó người ta sử dụng thuật toán gradient cải tiến để giải bài toán tối nói trên.

Đặt:

$$F(y) = \{u = \tau \cdot (x - y), x \in C, \tau \geq 0\} \subset R^n,$$

là tập các hướng chắn nhận được tại  $y$ . Và:

$$N(y) = \{s: \langle s, x - y \rangle \geq 0, s \in C\} \subset R^n, y \in C$$

là một nón lồi.

Ta xét các điều kiện tối ưu tương đương để  $x^*$  là điểm cực tiểu:

$$\phi'(x^*) = \nabla f(x^*) + \xi^* \in N(x^*), \quad (3.3)$$

với  $\xi^* \in \partial\Psi(x^*)$ . Nói cách khác:

$$\langle \xi^*, u \rangle \geq 0, \forall u \in F(x^*), \quad (3.4)$$

Mà  $\Psi$  là hàm lồi, suy ra:

$$\langle \phi'(x^*), u \rangle \geq 0, \forall u \in F(x^*). \quad (3.5)$$

*Chú ý:* Với trường hợp hàm  $f$  lồi, một trong các ràng buộc từ (3.2) đến (3.4) là điều kiện đủ để  $x^*$  là cực tiểu toàn cục của  $\phi$  trên tập lồi  $C$ .

**Định lý 3.1:** Điểm  $\bar{x} \in C$  thỏa mãn điều kiện tối ưu cực tiểu địa phương bậc nhất của hàm  $\phi$  trên tập  $C$  với độ chính xác  $\epsilon \geq 0$  nếu:

$$\langle \phi'(\bar{x}), u \rangle \geq -\epsilon, \forall u \in F(\bar{x}), \|u\| = 1. \quad (3.6)$$

Đây cũng là điều kiện dừng của thuật toán gradient. Trong trường hợp  $F(\bar{x}) = R^n$  và  $\nabla f(\bar{x}) + \partial\Psi(\bar{x}) \neq 0$ , rút gọn bất đẳng thức (2.5):

$$\begin{aligned} -\epsilon &\leq \min_{\|u\|=1} \langle \phi'(\bar{x}), u \rangle = \min_{\|u\|=1} \max_{\xi \in \partial\Psi(\bar{x})} \langle \nabla f(\bar{x}) + \xi, u \rangle \\ &= \min_{\|u\| \leq 1} \max_{\xi \in \partial\Psi(\bar{x})} \langle \nabla f(\bar{x}) + \xi, u \rangle \\ &= \max_{\xi \in \partial\Psi(\bar{x})} \min_{\|u\| \leq 1} \langle \nabla f(\bar{x}) + \xi, u \rangle \\ &= - \min_{\|u\| \leq 1} \|\nabla f(\bar{x}) + \xi\|. \end{aligned}$$

Với mọi  $y \in C$ , ký hiệu:

$$m_L(y; x) = f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2 + \Psi(x), \quad (3.7)$$

$$T_L(y) = \operatorname{argmin}_{x \in Q} m_L(y; x), \quad (3.8)$$

trong đó  $L$  là hằng số dương.

Xét véc tơ:

$$g_L(y) = L(y - T_L(y)) \in R^n. \quad (3.9)$$

Trong trường hợp  $Q \equiv R^n, \Psi \equiv 0$  thì  $g_L(y) = \nabla \phi(y) \equiv \nabla f(y)$  với mọi tham số  $L > 0$ . Một số tính chất của điều kiện tối ưu bậc nhất:

$$\langle \nabla f(y) + L(T_L(y) - y) + \xi_L(y), x - T_L(y) \rangle \geq 0, \forall x \in C, \quad (3.10)$$

trong đó  $\xi_L(y) \in \partial \Psi(T_L(y))$ . Suy ra:

$$\phi'(T_L(y)) = \nabla f(T_L(y)) + \xi_L(y) \in \partial \phi(T_L(y)). \quad (3.11)$$

Giả sử hàm mục tiêu (2.1) thỏa mãn điều kiện Lipschitz:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L_f \|x - y\|, \forall x, y \in C, \quad (3.12)$$

Do tập  $C$  lồi, biểu thức (3.9) tương đương với:

$$|f(x) - f(y) - \langle \nabla f(x), x - y \rangle| \leq \frac{L_f}{2} \|x - y\|^2, \forall x, y \in C, \quad (3.13)$$

Gọi  $S_L(y)$  là độ biến thiên của hàm  $\phi$  trên tập  $C$

$$S_L(y) = \frac{\|\nabla f(T_L(y)) - \nabla f(y)\|}{\|T_L(y) - y\|} \leq L_f.$$

### 3.1.3. Thuật toán gradient [4]

**Thuật toán 3.1.** Vòng lặp của phương pháp gradient  $\mathcal{G}_\phi(x, M)$ .

**SET:**  $L := M$ .

**REPEAT:**  $T := T_L(x)$ .

**If**  $\phi(T) > m_L(x, T)$ . **Then**  $L := L \cdot \gamma_u$ .

**UNTIL:**  $\phi(T) \leq m_L(x, T)$ .

**OUTPUT:**  $\mathcal{G}_\phi(x, M)$ .  $T = T; \mathcal{G}_\phi(x, M)$ .  $L = L$ ;

Chọn giá trị khởi tạo cho thuật toán gradient:

–  $L_0, 0 < L_0 < L_f$  trong đó  $L_f$  là hằng số Lipschitz của gradient của hàm  $f$  (thường chọn hằng số  $L$  rất lớn).

– Hai tham số điều chỉnh  $\gamma_u > 1$  và  $\gamma_d \geq 1$ .

– Chọn  $y_0 \in Q$  bất kỳ.

–  $k$  nguyên,  $k \geq 0$ .

Với việc chọn tham số điều chỉnh như trên, dễ thấy rằng giá trị  $L$  luôn tăng và  $L \leq L_f$ .

**Thuật toán 3.2.** Thuật toán gradient  $\mathcal{G}_\phi \mathcal{M}(y_0, L_0)$ .

*ITERATION:* (Bước lặp  $k$ )

$$y_{k+1} := \mathcal{G}_\phi(y_k, L_k) \cdot T,$$

$$M_k := \mathcal{G}_\phi(y_k, L_k) \cdot L,$$

$$L_{k+1} := \max\left\{L_0, \frac{M_k}{\gamma_d}\right\}.$$

Suy ra  $y_{k+1} = T_M(y_k)$ , từ thuật toán trên thu được biểu thức sau hiển nhiên đúng:

$$L_0 \leq L_k \leq M_k \leq \gamma_u L_f. \quad (3.14)$$

Ngoài ra, nếu  $\gamma_u \geq \gamma_d$  thì:

$$L_k \leq L_f, \forall k \geq 0.$$

### 3.2. Thuật toán Gradient cải tiến

Sau đây, chúng ta phát biểu thuật toán Gradient đối ngẫu.

**Thuật toán 3.2.** Thuật toán Gradient đối ngẫu  $\mathcal{DG}_\phi(v_0, L_0), k > 0$  [2]

*INITIAL* (Khởi tạo): Cho  $v_0 \in \text{dom}\Psi$ , định nghĩa hàm  $\psi_0(x) = \frac{1}{2}\|x - \vartheta_0\|^2$ , chọn hằng số dương  $L_0$  sao cho  $L_0 < L_f$ .

*ITERATION* (Bước lặp  $k$ ):

$$y_k = \mathcal{G}_\phi(\vartheta_k, L_k)T, M_k = \mathcal{G}_\phi(\vartheta_k, L_k)L,$$

$$L_{k+1} = \max\left\{L_0, \frac{M_k}{\gamma_d}\right\}, \alpha_{k+1} = \frac{1}{M_k},$$

$$\psi_{k+1}(x) = \psi_k(x) + \alpha_{k+1}[f(x_{k+1}) + \langle \nabla f(x_{k+1}), x - x_{k+1} \rangle] + \Psi(x).$$

Tiếp theo đây, chúng ta sẽ xét đến một thuật toán được cải tiến có tốc độ hội tụ tốt hơn hẳn so với hai thuật toán là thuật toán gradient và thuật toán gradient đối ngẫu đã được xét đến.

**Thuật toán 3.3.** Thuật toán gradient cải tiến  $\mathcal{A}(x_0, L_0, \mu)$  [1]

**INITIAL** (Khởi tạo): Chọn  $x_0 \in \text{dom}\Psi$ ,  $\mu$  thuộc đoạn  $(0, \mu_\Psi]$  đủ bé,  $a_0 = 0$ . Đặt  $\psi_0(x) = \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2$ , chọn hằng số dương  $L_0$  sao cho  $L_0 < L_f$ .

**ITERATION** (Bước lặp  $k$ ):

- Đặt  $L := L_k$

- Tìm  $a$  là giá trị thỏa mãn phương trình bậc hai  $\frac{a^2}{A_k+a} = 2\frac{1+\mu A_k}{L}$ . Đặt  $y = \frac{A_k x_k + a \vartheta_k}{A_k+a}$ , tính

$T_L(y)$  theo biểu thức (3.7).

- Nếu  $\langle \phi'(T_L(y)), y - T_L(y) \rangle < \frac{1}{L} \|\phi'(T_L(y))\|^2$  dừng thuật toán, lấy giá trị  $L := L \cdot \gamma_u$ .

- Nếu không, chuyển sang bước iii và thực hiện gán:

$$y_k := y, M_k := L, a_{k+1} := a,$$

$$L_{k+1} := \frac{M_k}{\gamma_d}, x_{k+1} := T_{M_k}(y_k),$$

$$\psi_{k+1}(x) = \psi_k(x) + \alpha_{k+1}[f(x_{k+1}) + \langle \nabla f(x_{k+1}), x - x_{k+1} \rangle] + \Psi(x).$$

Quay lại bước ii.

#### 4. MỘT SỐ TÍNH TOÁN THỬ NGHIỆM

Từ bài toán phân lớp nêu ở Mục 2, chúng ta đưa bài toán đó về dạng tối ưu. Vùng không gian nằm giữa hai siêu phẳng gọi là cận biên, khoảng cách giữa hai siêu phẳng là

$$\frac{2}{\|w\|}$$

. Bài toán đặt ra là, tìm khoảng cách lớn nhất giữa hai siêu phẳng. Như vậy, bài toán

chuyển về bài toán tối ưu được phát biểu như sau:

Tìm cực tiểu của hàm:

$$\min \|w\|^2$$

với điều kiện:  $c_i(\langle w, x_i \rangle - b) \geq 1, \forall i = 1, 2, \dots, m$ .

Trong nhiều trường hợp, tập huấn luyện  $D$  có thể không phân tách tuyến tính (hay tồn tại điểm nhiễu), khi đó ta sử dụng biến bù  $\xi_i$  để đo mức độ không thể phân loại điểm dữ liệu  $\xi_i$ :

$$c_i(\langle w, x_i \rangle - b) \geq 1 - \xi_i, 1 \leq i \leq m.$$

hàm mục tiêu tăng thêm một lượng tương ứng khi tham số  $\xi_i$  khác không. Cụ thể bài toán lúc này trở thành:

$$\min\left\{\frac{1}{2}\|w\|^2 + C \sum_{i=1}^m \xi_i\right\}$$

với điều kiện  $c_i(\langle w, x_i \rangle - b) \geq 1 - \xi_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$ .

Đây là hàm mục tiêu dạng quy hoạch toàn phương, một trường hợp riêng của qui hoạch lồi tuyến tính. Vì vậy, nó còn có thể được giải bằng phương pháp Franke-Wolfe hay phương pháp đơn hình Beale. Tiếp đây, chúng ta sử dụng thuật toán gradient cơ bản để giải bài toán tối ưu với hàm mục tiêu trên.

Xét với một trường hợp riêng của bài toán nêu trên khi  $b = 0$ , chọn tham số  $C = \frac{1}{\lambda m}$

viết lại bài toán tối ưu cần giải:

$$\min \phi(w) = \frac{\lambda}{2} \|w\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m l_i(w) \quad (4.1)$$

với điều kiện:  $l_i(w) = \max\{0, 1 - c_i \langle w, x_i \rangle\}, i = 1, 2, \dots, m$ . Trong trường hợp này  $f(x) = \frac{\lambda}{2} \|x\|^2$ , và hàm  $\Psi(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m l_i(x)$ .

Ta sẽ sử dụng thuật toán gradient để giải bài toán cụ thể trên. Tức là tìm tọa độ của véc tơ  $w(w_1, w_2)$  là nghiệm tối ưu toàn cục của hàm số:

$$\phi(w) = \frac{\lambda}{2} \|w\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m l_i(w)$$

*Ý tưởng của bài toán như sau:*

– Cho trước một véc tơ pháp tuyến  $a$ , có gốc nằm trên đường thẳng bất kỳ phân chia hai lớp dữ liệu cho trước.

– Hai lớp dữ liệu này được tạo ngẫu nhiên và gán nhãn  $\{+1; -1\}$ .

– Sau đó sử dụng thuật toán tối ưu gradient để tìm véc tơ pháp tuyến của đường thẳng tối ưu phân chia hai lớp dữ liệu đã tạo ngẫu nhiên (véc tơ pháp tuyến này có gốc nằm trên đường thẳng).

– Khi đã xác định được véc tơ pháp tuyến có gốc nằm trên đường thẳng, thì chúng ta cũng dễ dàng xác định đường thẳng duy nhất thỏa mãn điều kiện này.

Khai báo sai số  $\epsilon = 10^{-6}$ . Thuật toán có thể được viết lại như sau:

**Thuật toán 4.1:** Thuật toán gradient  $\mathcal{G}_f$

▪ Chọn giá trị ban đầu  $x_0$ , chọn số cho trước  $\alpha > 0$ .

▪ **Lặp:**  $k = 1, 2, \dots$

Bước 1: Tính  $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$

Bước 2: Kiểm tra:



- Nếu  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ , chọn
- Ngược lại, đặt  $\alpha = \frac{\alpha}{2}$  và quay lại Bước 1.

**Chạy thử nghiệm với một số bộ dữ liệu sau:**

a. Thử nghiệm với dữ liệu ngẫu nhiên gồm 20 điểm

>>  $[a,w] = \text{PhanLop}(20,2)$

$a =$

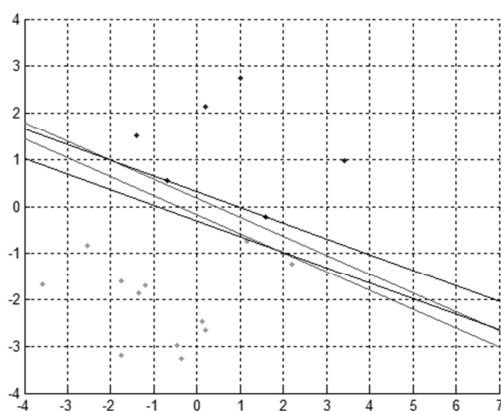
2.2805

5.6246

$w =$

1.0671

3.1872



**Hình 5.** Mô phỏng đồ thị phân lớp dữ liệu 20 điểm ngẫu nhiên.

b. Tạo 100 điểm dữ liệu ngẫu nhiên

>>  $[a,w] = \text{PhanLop}(100,2)$

$a =$

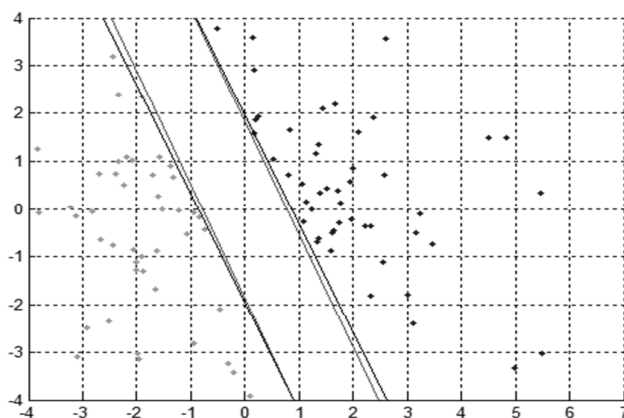
1.2821

0.5431

$w =$

1.1631

0.5111



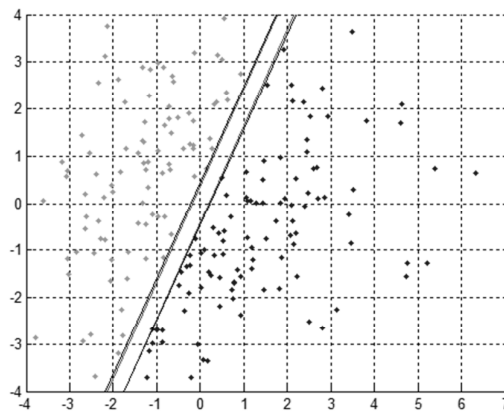
**Hình 6.** Khi tăng điểm dữ liệu lên 100 điểm ngẫu nhiên.

Thực hiện tăng số điểm ngẫu nhiên trên không gian 2 chiều.

c. Thử nghiệm với 200 điểm dữ liệu ngẫu nhiên

```
>> [a,w] = PhanLop(200,2)
```

a =	w =
5.3324	4.5695
-2.6038	-2.2495



**Hình 7.** Mô phỏng khi tăng hệ số điểm ngẫu nhiên

d. Thử nghiệm với 100 điểm dữ liệu ngẫu nhiên trên không gian ba chiều

```
>> [a,w] = PhanLop(100,3)
```

a =	w =
1.0645	0.8317
-3.9196	-3.2198
3.6634	3.1436

e. Thử nghiệm với 100 điểm dữ liệu ngẫu nhiên trên không gian 5 chiều

```
>> [a,w] = PhanLop(100,5)
```

a =	w =
1.1616	0.6263
-4.9320	-2.5409
0.8892	0.7258
5.2191	2.8727
-3.5934	-2.0685

Dựa trên các kết quả trên, có thể đưa ra một số các nhận xét như sau:

- Khi số điểm ngẫu nhiên càng ít, có thể thấy được 2 véc tơ phân chia 2 lớp dữ liệu tối ưu tìm được có khoảng cách lớn hơn rõ so với 2 véc tơ ngẫu nhiên chọn ban đầu.

– Điểm dữ liệu ngẫu nhiên càng nhiều, 2 véc tơ chọn ngẫu nhiên ban đầu rất gần so với 2 véc tơ tối ưu tìm được về sau. Điều này là do với số điểm dữ liệu nhiều thì có rất nhiều điểm của phân lớp thuộc trên véc tơ phân cách, do đó khả năng chấp nhận được của thuật toán là ít và rất gần nhau.

## 5. KẾT LUẬN

– Bài báo đã trình bày bài toán phân cụm dữ liệu và phương pháp Support Vector Machines đưa bài toán phân cụm dữ liệu về bài toán tối ưu. Sau đó dùng phương pháp Gradient để giải quyết bài toán tối ưu.

– Bài báo tập trung vào phương pháp Gradient và Gradient cải tiến giải bài toán tối ưu phi tuyến không ràng buộc và áp dụng nó vào bài toán phân cụm dữ liệu. Chương trình được cài đặt trên MATLAB cho thấy kết quả là rất tốt.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Tseng, P. Yun, *A coordinate gradient descent method for linearly constrained smooth optimization and support vector machines training*, B 47, pp.179-206.
2. Tseng, P. Yun (2009), *A coordinate gradient descent method for nonsmooth separable minimization*. *Math, Program*, B117, pp.387-423.
3. Nguyễn Trọng Toàn (2012), *Giáo trình các phương pháp tính toán số*, Học viện Kỹ thuật Quân sự.
4. Nguyễn Thị Bạch Kim (2014), *Giáo trình các phương pháp tối ưu lý thuyết và thuật toán*, Nxb Đại học Bách khoa.

## SOLVING THE OPTIMAL PROBLEM USING THE GRADIENT METHOD AND THE APPLICATION

**Abstract:** *The article analyzes the method to solve the nonlinear optimization problem that is bound by the classical Gradient method. For classical gradient methods use the defining method to take on the non constraint nonlinear problem  $\{\min \phi = f + \Psi\}$ , then solve the non constraint optimal nonlinear problem. The article also provides the advanced gradient method for solving the optimal problem  $\{\min \phi\}$  with a function  $\Psi$  much more complex than the classical gradient method. The article also presents the problem of data stratification; apply Gradient method to put the data stratification problem to optimization problem.*

**Keywords:** *The gradient method, Advanced Gradient Method, Support vector machine, defining, sample set.*

## QUINTIC B-SPLINE COLLOCATION METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION A MODIFIED GRLW EQUATIONS

Nguyen Van Tuan

*Hanoi Metropolitan University*

**Abstract:** *In this paper, numerical solution of a modified generalized regularized long wave (mGRLW) equation are obtained by a method based on collocation of quintic B – splines. Applying the von – Neumann stability analysis, the proposed method is shown to be unconditionally stable. The numerical result shows that the present method is a successful numerical technique for solving the GRLW and mGRLW equations that they have real exact solutions.*

**Keywords:** *mGRLW equation; quintic B-spline; collocation method; finite difference.*

Email: nvtuan@daihocthudo.edu.vn

Received 12 July 2017

Accepted for publication 10 September 2017

### 1. INTRODUCTION

In this paper we consider the solution of the mGRLW equation:

$$\begin{aligned} u_t + \alpha u_x + \varepsilon u^p u_x - \mu u_{xx} - \beta u_{xxt} &= 0, \\ x \in [a, b], t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1)$$

with the initial condition:

$$u(x, 0) = f(x), x \in [a, b], \quad (2)$$

and the boundary condition:

$$\begin{cases} u(a, t) = 0, u(b, t) = 0 \\ u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0 \\ u_{xx}(a, t) = u_{xx}(b, t) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

where  $\alpha, \varepsilon, \mu, \beta, p$  are constants,  $\mu > 0, \beta > 0, p$  is an integer.

The mGRLW (1) is called the generalized regularized long wave (GRLW) equation if  $\mu = 0$ , the generalized equal width (GEW) equation if  $\alpha = 0, \mu = 0$ , the regularized long wave (RLW) equation or Benjamin – Bona – Mohony (BBM) equation if  $\beta = 1, p = 1$ , etc.

Equation (1) describes the mathematical model of wave formation and propagation in fluid dynamics, turbulence, acoustics, plasma dynamics, ect. So in recent years, researchers solve the GRLW and mGRLW equation by both analytic and numerical methods. The GRLW equation is solved by finite difference method [6], Petrov – Galerkin method [8], distributed approximating functional method [7], IMLS – Ritz method [3], methods use the B – spline as the basis functions [2], exact solution methods [9]. The mGRLW is solved by reproducing kernel method [4], time – linearization method [5], exact solution method [1].

In this present paper, we have applied the pentic B – spline collocation method to the GRLW and mGRLW equations. This work is built as follow: in Section 2, numerical scheme is presented. The stability analysis of the method is established in Section 3. The numerical results are discussed in Section 4. In the last Section, Section 5, conclusion is presented.

## 2. QUINTIC B – SPLINE COLLOCATION METHOD

The interval  $[a, b]$  is partitioned in to a mesh of uniform length  $h = x_{i+1} - x_i$  by the knots  $x_i, i = \overline{0, N}$  such that:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Our numerical study for mGRLW equation using the collocation method with quintic B-spline is to find an approximate solution  $U(x, t)$  to exact solution  $u(x, t)$  in the form:

$$U(x, t) = \sum_{i=-2}^{N+2} \delta_i(t) B_i(x), \quad (4)$$

$B_i(x)$  are the quintic B-spline basis functions at knots, given by [4].

$$B_i(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{i-3})^5, & x_{i-3} \leq x \leq x_{i-2} \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5, & x_{i-2} \leq x \leq x_{i-1} \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 + 15(x - x_{i-1})^5, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 + 15(x - x_{i-1})^5 - \\ \quad - 20(x - x_i)^5, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 + 15(x - x_{i-1})^5 - 20(x - x_i)^5 + \\ \quad + 15(x - x_{i+1})^5, & x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 + 15(x - x_{i-1})^5 - 20(x - x_i)^5 + \\ \quad + 15(x - x_{i+1})^5 - 6(x - x_{i+2})^5, & x_{i+2} \leq x \leq x_{i+3} \\ 0, & x < x_{i-3} \cup x > x_{i+3}. \end{cases}$$

The value of  $B_i(x)$  and its derivatives may be tabulated as in Table 1.

$$\begin{aligned} U_i &= \delta_{i-2} + 26\delta_{i-1} + 66\delta_i + 26\delta_{i+1} + \delta_{i+2} \\ U'_i &= \frac{5}{h} (-\delta_{i-2} - 10\delta_{i-1} + 10\delta_{i+1} + \delta_{i+2}) \\ U''_i &= \frac{20}{h^2} (\delta_{i-2} + 2\delta_{i-1} - 6\delta_i + 2\delta_{i+1} + \delta_{i+2}). \end{aligned}$$

Table 1.  $B_i, B'_i,$  and  $B''_i$  at the node points

$x$	$x_{i-3}$	$x_{i-2}$	$x_{i-1}$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_{i+2}$	$x_{i+3}$
$B_i(x)$	0	1	26	66	26	1	0
$B'_i(x)$	0	$\frac{5}{h}$	$\frac{50}{h}$	0	$-\frac{50}{h}$	$-\frac{5}{h}$	0
$B''_i(x)$	0	$\frac{20}{h^2}$	$\frac{40}{h^2}$	$-\frac{120}{h^2}$	$\frac{40}{h^2}$	$\frac{20}{h^2}$	0

Using the finite difference method, from the equation (1), we have:

$$\frac{(u - \beta u_{xx})^{n+1} - (u - \beta u_{xx})^n}{\Delta t} + \varepsilon \frac{(u^p u_x)^{n+1} + (u^p u_x)^n}{2} + \alpha \frac{(u_x)^{n+1} + (u_x)^n}{2} - \mu \frac{u_{xx}^{n+1} + u_{xx}^n}{2} = 0. \quad (5)$$

The nonlinear term  $(u^p u_x)^{n+1}$  in Eq. (5) can be approximated by using the following formulas which obtained by applying the Taylor expansion:

$$(u^p u_x)^{n+1} = (u^p)^n u_x^{n+1} + p(u^n)^{p-1} u_x^n u_x^{n+1} - p(u^n)^p u_x^n.$$

So Eq. (5) can be rewritten as

$$\begin{aligned} (u - \beta u_{xx})^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} [-\mu u_{xx}^{n+1} + \varepsilon (u^p)^n u_x^{n+1} + p \varepsilon (u^n)^{p-1} u_x^n u_x^{n+1} + \alpha u_x^{n+1}] \\ = (u - \beta u_{xx})^n + \frac{\Delta t}{2} [\mu u_{xx}^n + (p-1) \varepsilon (u^p)^n u_x^n - \alpha u_x^n]. \end{aligned} \quad (6)$$

Using the value given in Table 1, Eq. (6) can be calculated at the knots  $x_i, i = \overline{0, N}$  so that at  $x = x_0$ , Eq. (6) reduces to:

$$\begin{aligned} a_{i1} \delta_{i-2}^{n+1} + a_{i2} \delta_{i-1}^{n+1} + a_{i3} \delta_i^{n+1} + a_{i4} \delta_{i+1}^{n+1} + a_{i5} \delta_{i+2}^{n+1} = b_{i1} \delta_{i-2}^n + b_{i2} \delta_{i-1}^n + b_{i3} \delta_i^n \\ + b_{i4} \delta_{i+1}^n + b_{i5} \delta_{i+2}^n, \end{aligned} \quad (7)$$

Where:

$$\begin{aligned} a_{i1} &= 2h^2 - 5h\alpha\Delta t - 5h\varepsilon\Delta t L_{i1}^p + 5hp\varepsilon\Delta t (L_{i1})^{p-1} L_{i2} - 20\mu\Delta t - 40\beta; \\ a_{i2} &= 52h^2 - 50h\alpha\Delta t - 50h\varepsilon\Delta t L_{i1}^p + 130hp\varepsilon\Delta t (L_{i1})^{p-1} L_{i2} - 40\mu\Delta t - 80\beta; \\ a_{i3} &= 132h^2 + 330hp\varepsilon\Delta t + 330h\beta\Delta t (L_{i1})^{p-1} L_{i2} + 240\beta; \\ a_{i4} &= 52h^2 + 50h\alpha\Delta t + 50h\varepsilon\Delta t L_{i1}^p + 130hp\varepsilon\Delta t (L_{i1})^{p-1} L_{i2} - 40\mu\Delta t - 80\beta; \\ a_{i5} &= 2h^2 + 5h\alpha\Delta t + 5h\varepsilon\Delta t L_{i1}^p + 5hp\varepsilon\Delta t (L_{i1})^{p-1} L_{i2} - 20\mu\Delta t - 40\beta; \\ b_{i1} &= 2h^2 + 5h\alpha\Delta t - 5h(p-1)\varepsilon\Delta t L_{i1}^p + 20\mu\Delta t - 40\beta; \\ b_{i2} &= 52h^2 + 50h\alpha\Delta t - 50h(p-1)\varepsilon\Delta t L_{i1}^p + 40\mu\Delta t - 80\beta; \\ b_{i3} &= 2(66h^2 - 60\mu\Delta t + 120\beta); \end{aligned}$$

$$b_{i4} = 52h^2 - 50h\alpha\Delta t + 50h(p - 1)\varepsilon\Delta tL_{i1}^p + 40\mu\Delta t - 80\beta;$$

$$b_{i5} = 2h^2 - 5h\alpha\Delta t + 5h(p - 1)\varepsilon\Delta tL_{i1}^p + 20\mu\Delta t - 40\beta;$$

$$L_{i1} = \delta_{i-2} + 26\delta_{i-1} + 66\delta_i + 26\delta_{i+1} + \delta_{i+2}$$

$$L_{i2} = -\delta_{i-2} - 10\delta_{i-1} + 10\delta_{i+1} + \delta_{i+2}.$$

The system (7) consists of  $N + 1$  equations in the  $N + 5$  knowns  $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$ .

To get a solution to this system, we need four additional constraints. These constraints are obtained from the boundary conditions (3) and can be used to eliminate from the system (7). Then, we get the matrix system equation

$$A(\delta^n)\delta^{n+1} = B(\delta^n)\delta^n + r, \tag{8}$$

where the matrix  $A(\delta^n), B(\delta^n)$  are penta-diagonal  $(N + 1) \times (N + 1)$  matrices and  $r$  is the  $N + 1$  dimensional column vector. The algorithm is then used to solve the system (8). We apply first the initial condition:

$$U(x, 0) = \sum_{i=-2}^{N+2} \delta_i^0 B_i(x), \tag{9}$$

then we need that the approximately solution is satisfied following conditions:

$$\begin{cases} U(x_i, 0) = f(x_i) \\ U_x(x_0, 0) = U_x(a, 0) = 0 \\ U_x(x_N, 0) = U_x(b, 0) = 0 \\ U_{xx}(x_0, 0) = U_{xx}(a, 0) = 0 \\ U_{xx}(x_N, 0) = U_{xx}(b, 0) = 0 \\ i = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \tag{10}$$

Eliminating  $\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_{N+1}^0$  and  $\delta_{N+2}^0$  from the system (11), we get:

$$A\delta^0 = r,$$

where  $A$  is the penta-diagonal matrix given by:

$$A = \begin{pmatrix} 54 & 60 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{101}{4} & \frac{135}{2} & \frac{105}{4} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & & \\ \dots & & \dots & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \frac{105}{4} & \frac{135}{2} & \frac{101}{4} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 6 & 60 & 54 \end{pmatrix}$$

and  $\delta^0 = (\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0)^T, r = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N))^T$ .

### 3. STABILITY ANALYSIS

To apply the Von-Neumann stability for the system (6), we must first linearize this system.

We have:

$$\delta_j^n = \xi^n \exp(i\gamma jh), i = \sqrt{-1}, \quad (11)$$

where  $\gamma$  is the mode number and  $h$  is the element size.

Being applicable to only linear schemes the nonlinear term  $U^p U_x$  is linearized by taking  $U$  as a locally constant value  $k$ . The linearized form of proposed scheme is given as:

$$\begin{aligned} p_1 \delta_{i-2}^{n+1} + p_2 \delta_{i-1}^{n+1} + p_3 \delta_i^{n+1} + p_4 \delta_{i+1}^{n+1} + p_5 \delta_{i+2}^{n+1} = p'_1 \delta_{i-2}^n + p'_2 \delta_{i-1}^n + \\ p'_3 \delta_i^n + p'_4 \delta_{i+1}^n + p'_5 \delta_{i+2}^n \end{aligned} \quad (12)$$

Where:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - M - N_1 - P \\ p_2 &= 26 - 10M - 2N_1 - 2P \\ p_3 &= 66 + 6N_1 + 6P \\ p_4 &= 26 + 10M - 2N_1 - 2P \\ p_5 &= 1 + M - N_1 - P \\ p'_1 &= 1 + M + N_1 - P \\ p'_2 &= 26 + 10M + 2N_1 - 2P \\ p'_3 &= 66 - 6N_1 + 6P \\ p'_4 &= 26 - 10M + 2N_1 - 2P \\ p'_5 &= 1 - M + N_1 - P, \\ M &= \frac{5(\alpha + \epsilon k^p) \Delta t}{h}, \\ N_1 &= \frac{10\mu \Delta t}{h^2}, \quad P = \frac{10\beta}{h^2}. \end{aligned}$$

Substitution of  $\delta_j^n = \exp(i\gamma jh) \xi^n$ , into Eq. (12) leads to:

$$\begin{aligned} \xi [p_1 \exp(-2i\gamma h) + p_2 \exp(-i\gamma h) + p_3 + p_4 \exp(i\gamma h) + p_5 \exp(2i\gamma h)] = \\ p'_1 \exp(-2i\gamma h) + p'_2 \exp(-i\gamma h) + p'_3 + p'_4 \exp(i\gamma h) + p'_5 \exp(2i\gamma h). \end{aligned} \quad (13)$$

Simplifying Eq. (13), we get:

$$\xi = \frac{A - iB}{C + iB}$$



Where:

$$A = 2(1 + N_1 - P)\cos(2\phi) + 4(13 + N_1 - P)\cos\phi + 66 - 6N_1 + 6P;$$

$$B = 2M(\sin(2\phi) + 10);$$

$$C = 2(1 - N_1 - P)\cos(2\phi) + 4(13 - N_1 - P)\cos\phi + 66 + 6N_1 + 6P;$$

$$\alpha, \gamma > 0, \phi = \gamma h.$$

It is clear that  $C^2 \geq A^2$ .

Therefore, the linearized numerical scheme for the mGRLW equation is unconditionally stable.

#### 4. NUMERICAL EXAMPLE

We now obtain the numerical solution of the GBBMB equation for a problem. To show the efficiency of the present method for our problem in comparison with the exact solution, we report  $L_\infty$  and  $L_2$  using formula:

$$L_\infty = \max_i |U(x_i, t) - u(x_i, t)|,$$

$$L_2 = \left( h \sum_i |U(x_i, t) - u(x_i, t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

where  $U$  is numerical solution and  $u$  denotes exact solution.

Three invariants of motion which correspond to the conservation of mass, momentum, and energy are given as

$$I_1 = \int_a^b u dx, \quad I_2 = \int_a^b (u^2 + \beta u_x^2) dx,$$

$$I_3 = \int_a^b \left( u^4 - \frac{2\beta(p+1)}{\varepsilon} u_x^2 \right) dx.$$

**Example 1.** Consider the GRLW equation with  $\varepsilon = 3, \alpha = \mu = 0, \beta = 1$ . The exact of Eq. (1) is given in [7]

$$u(x, t) = \sqrt[3]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{p}{2\sqrt{\beta}} (x - x_0 - ct) \right]}.$$

We choose the following parameters

$$a = 0; \quad b = 80; \quad x_0 = 30; \quad T = 20; \quad p = 3; 6; 8; 10; \quad c = 0.03; 0.01; \quad h = 0.1; 0.2$$

The obtained results are tabulated in Table 2.

**Table 2.** Errors for single solitary wave with  $t = 20, x \in [0, 80]$ .

			p = 3		p = 6		p = 8		p = 10	
	c		0.03	0.1	0.03	0.1	0.03	0.1	0.03	0.1
$L_2 \times 10^4$	h	$\Delta t$								
	0.1	0.01	0.0121	0.0338	0.1536	0.3335	0.4125	0.9543	1.0245	2.6869
	0.2	0.01	0.2450	0.6261	4.3751	11.937	26.570	95.620	160.85	597.42
	0.1	0.05	0.0192	0.2343	0.1636	1.5464	0.4425	3.3481	1.0787	6.6584
	0.2	0.05	0.2463	0.7507	4.3900	13.050	26.620	9.8054	160.94	601.56
$L_\infty \times 10^4$	0.1	0.01	0.0178	0.0291	0.2337	0.3249	0.6128	0.9467	1.4296	2.6227
	0.2	0.01	0.3180	0.5266	6.7731	11.439	30.619	82.150	140.57	477.61
	0.1	0.05	0.0196	0.1553	0.2494	1.2328	0.6513	2.8170	1.4872	5.8466
	0.2	0.05	0.3198	0.6477	6.7890	12.340	30.150	84.007	140.63	480.71

**Example 2.** Consider the mGRLW equation with  $\varepsilon = 3, \alpha = 3, \mu = 2, \beta = 1$ . The exact of Eq. (1) is given:

$$u(x, t) = \left\{ \rho \left[ 1 + \frac{3 \sinh(kx + \omega t + x_0) + 5 \cosh(kx + \omega t + x_0)}{3 \cosh(kx + \omega t + x_0) + 5 \sinh(kx + \omega t + x_0)} \right] \right\}^{\frac{2}{p}},$$

where  $\rho = \sqrt{\frac{1}{8\beta\varepsilon(p+4)}(\alpha\beta(p^2 + 5p + 4 + (p+1)A))}$ ,  $k = \frac{1}{8\beta\mu(p+2)}(-\alpha\beta(p+4) + A)$ ,

$$\omega = \frac{-p\mu}{2\beta(p+4)}, A = \sqrt{\beta(p+4)[\alpha^2\beta(p+4) - 8\mu^2]}.$$

We choose the following parameters:

$$a = 0, b = 80, x_0 = 30, t \in [0, 20], p = 8, h = 0.1; 0.2, \Delta t = 0.01; 0.05$$

The obtained results are tabulated in Table 3 and Table 4.

**Table 3.** Errors and invariants for single solitary wave with  $x \in [0, 80], \Delta t = 0.01$ .

t	h = 0.1					h = 0.2				
	0	5	10	15	20	0	5	10	15	20
$I_1$	104.32	104.32	104.32	104.32	104.32	104.45	104.45	104.45	104.45	104.45
$I_2$	104.32	104.32	104.32	104.32	104.32	104.45	104.45	104.45	104.45	104.45
$I_3$	230.42	230.42	230.42	230.42	230.42	230.71	230.71	230.71	230.71	230.71
$L_2$	$6.3 \times 10^{-9}$	$0.48 \times 10^{-5}$	$0.44 \times 10^{-5}$	$0.44 \times 10^{-5}$	$0.46 \times 10^{-5}$	$6.3 \times 10^{-9}$	$0.45 \times 10^{-5}$	$0.44 \times 10^{-5}$	$0.44 \times 10^{-5}$	$0.46 \times 10^{-5}$
$L_\infty$	$10^{-9}$	$6.5 \times 10^{-7}$	$6.9 \times 10^{-7}$	$6.8 \times 10^{-7}$	$6.5 \times 10^{-7}$	$10^{-9}$	$9.4 \times 10^{-7}$	$9.4 \times 10^{-7}$	$9.4 \times 10^{-7}$	$9.5 \times 10^{-7}$

Table 4. Errors and invariants for single solitary wave with  $x \in [0,80]$ ,  $\Delta t = 0.05$ .

t	h = 0.1					h = 0.2				
	0	5	10	15	20	0	5	10	15	20
I <sub>1</sub>	104.32	104.32	104.32	104.32	104.32	104.45	104.45	104.45	104.45	104.45
I <sub>2</sub>	104.32	104.32	104.32	104.32	104.32	104.45	104.45	104.45	104.45	104.45
I <sub>3</sub>	230.42	230.42	230.42	230.42	230.42	230.71	230.71	230.71	230.71	230.71
L <sub>2</sub>	6.3× 10 <sup>-9</sup>	3.57× 10 <sup>-7</sup>	2.92× 10 <sup>-7</sup>	3.58× 10 <sup>-7</sup>	3.56× 10 <sup>-7</sup>	6.3× 10 <sup>-9</sup>	2.29× 10 <sup>-7</sup>	2.33× 10 <sup>-7</sup>	2.22 × 10 <sup>-7</sup>	2.21 × 10 <sup>-7</sup>
L <sub>∞</sub>	10 <sup>-9</sup>	6.5× 10 <sup>-8</sup>	6.5× 10 <sup>-8</sup>	8.4 × 10 <sup>-8</sup>	6.4× 10 <sup>-8</sup>	10 <sup>-9</sup>	3.6 × 10 <sup>-8</sup>	4.9 × 10 <sup>-8</sup>	3.7 × 10 <sup>-8</sup>	4.2 × 10 <sup>-8</sup>

## 5. CONCLUSIONS

A numerical method based on collocation of quintic B-spline had been described in the previous section for solving mGRLW equation. A finite difference scheme had been used for discretizing time derivatives and quintic B-spline for interpolating the solution at its capable time level. From the test problems, the obtained result show that the present method is capable for solving mGRLW equation.

## REFERENCES

1. Baojian Hong, Dianchen Lu (2008), "New exact solutions for the generalized BBM and Burgers-BBM equations", *World Journal of Modelling and Simulation*, Vol. 4, No. 4, pp.243–249.
2. S. Battal Gazi Karakoça, Halil Zeybek (2016), "Solitary-wave solutions of the GRLW equation using septic B-spline collocation method", *Applied Mathematics and computation*, **289**, pp.159–171.
3. Dong-MeiHuang, L.W.Zhang (2014), "Element-Free Approximation of Generalized Regularized Long Wave Equation", *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. **2014**.
4. M.J. Du, Y.L. Wang, C.L. Temuer, X. Liu (2016), "Numerical Comparison of two Reproducing Kernel Methods for solving Nonlinear Generalized Regularized Long Wave Equation", *Universal Journal of Engineering Mechanics*, **4**, pp.19-25.
5. C. M. Garcia – Lopez, J. I. Ramos (2012), *Effect of convection on a modified GRLW equation*, *Applied Mathematics and computation*, **219**, pp.4118–4132.
6. D. A. Hammad, M. S. EI – Azad (2015), "A 2N order compact finite difference method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation", *Applied Mathematics and computation*, **253**, pp.248–261.

7. E. Pindza, E. Mare (2014), “Solving the generalized regularized long wave equation using a distributed approximating functional method”, *International J. Computational Mathematics*, Vol. **2014**.
8. Thoudam Roshan (2012), “A Petrov – Galerkin method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation”, *Computers and Mathematics with applications*, **63**, pp.943-956.
9. Wang Ju-Feng, Bai Fu-Nong and Cheng Yu-Min (2011), “A meshless method for the nonlinear generalized regularized long wave equation”, *Chin. Phys. B* Vol. **20**, No. 3, p.030206.

## PHƯƠNG PHÁP COLLOCATION VỚI CƠ SỞ B-SPLINE BẬC 5 GIẢI PHƯƠNG TRÌNH GENERALIZED BENJAMIN-BONA- MAHONY-BURGERS

**Tóm tắt:** Trong bài báo này chúng ta sử dụng phương pháp collocation với cơ sở B – spline bậc 5 giải xấp xỉ phương trình mGRLW. Sử dụng phương pháp Von – Neumann hệ phương trình sai phân ổn định vô điều kiện. Kết quả số chứng tỏ phương pháp đưa ra hữu hiệu để giải phương trình trên.

**Từ khóa:** Phương trình mGRLW, spline bậc 5, phương pháp collocation, phương pháp sai phân hữu hạn.

## TYPE 2 SOLUTIONS OF RADOM FUZY WAVE EQUANTION UNDER GENERALIZED HUKUHARA DIFERNTIABILITY

Nguyen Thi Kim Son

Hanoi National University of Education

**Abstract:** In this paper, random fuzzy wave equations under generalized Hukuhara differentiability are considered. By utilizing the method of successive approximations, the existence, uniqueness and the continuous dependence on the data of type 2 random fuzzy solutions of problem are proven. The most difficulty in this research is not only depending on the concepts of fuzzy stochastic processes, which deeply depends on the measurable properties of setvalued multivariable functions, but also depending on calculation with  $gH$ -derivatives of multivariable. When we overcome these obstacles, the gained random fuzzy solutions have decreased length of their values, which is more significant to model many systems in the real world.

**Keywords:** Random wave equations,  $gH$  - derivatives, Gronwall's lemma, existence, uniqueness, solvability, boundedness, fuzzy solutions.

Email: sonntk@hnue.edu.vn

Received 19 July 2017

Accepted for publication 10 September 2017

### 1. INTRODUCTION

Many real-world problems are very often inexactly formulated and imperfectly described meanwhile deterministic mathematic requires precise knowledge and certainty information (real numbers, explicit functions, exact data etc.). Therefore, there is an extremely strong demand from the modern technology and industry for new mathematics that can handle such abnormal and irregular problems. Stochastic and fuzzy mathematics were born under this urge and have had a strongly development in recent years.

We can find some researches concerning random fuzzy differential equations in the last two decades, such as the works of Fei [6], Guo and Guo [7], Ji and Zhou [9], Li and Wang [12] and Malinowski et al. [21, 22, 23, 24, 25]. In these papers, the authors combined two kinds of uncertainty, randomness and fuzziness, in the model of random fuzzy differential equations.

Recently, Bede and Stefanini [2, 3] have introduced the notion of gH-differentiability for fuzzy mappings. This new definition overcomes the shortcoming of classical Hukuhara differentiability, for which the length of the diameter of a fuzzy solution monotonically decreases in independent variables. Thus the behavior of fuzzy dynamic systems is more and more certain in time. After that this notion has rapidly attracted many researchers and many results on the existence and uniqueness of two kinds of gH-solutions of fuzzy equations have been given, see for example in [2, 3, 10, 16, 14, 15, 21, 22].

In this paper we introduce a new notion of random fuzzy solutions of wave equation under the sense of gH-differentiability in type 2. This model is known as boundary valued problems for nonlinear wave equations.

$$D_{xy}^2 u(x, y, \omega) \stackrel{J\mathbb{P}.1}{=} f_\omega(x, y, u(x, y, \omega)), \quad (x, y) \in J = [0, a] \times [0, b], \quad k = 1, 2,$$

with local condition:

$$u(x, 0, \omega) \stackrel{[0,a]\mathbb{P}.1}{=} \nu_1(x, \omega); \quad u(0, y, \omega) \stackrel{[0,b]\mathbb{P}.1}{=} \nu_2(y, \omega),$$

Where  $D_{xy}^2 u(\dots)$  is generalized Hukuhara derivatives in type 2 of fuzzy stochastic process  $u(\dots)$ . Our models can be considered as an extension of fuzzy random differential equations [7, 12, 22, 24] to the multivariable models, of deterministic fuzzy partial differential equations [13-20] to the random cases and of set-valued differential equations to the fuzzy cases as shown in [21].

This paper is organized as follows. In Sect. 2, some necessary preliminaries of fuzzy analysis are presented. The Darboux problems for fuzzy nonlinear wave equations will be stated in Sect. 3 with the definition of random fuzzy solutions in type 2. The solvability of the problem and continuous dependence of solutions with respect to data is investigated in Sect. 4. Some auxiliary important lemmas are given in section 5 of Appendix. Finally, some conclusions are discussed in Sect. 6.

## 2. A BRIEF OF FUZZY CALCULUS

Let  $E$  be the space of fuzzy sets on  $\mathbb{R}$ , that are nonempty subsets  $\{(x, u(x)): x \in \mathbb{R}\}$  in  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  of certain functions  $u: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  being normal, fuzzy convex, semi-continuous and compact support. For  $u \in E$ , the  $\alpha$ -cuts or level sets of  $u$  are defined by  $[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}:$

$u(x) \geq \alpha\}$ , which are in  $K_C$  for all  $0 \leq \alpha \leq 1$ , where  $K_C$  is the set consisting of all nonempty compact, convex subsets of  $\mathbb{R}$ . Denote  $[u]^0 = \{x \in \mathbb{R}: u(x) > 0\}$  by the support of  $u$ .

For  $u \in E$ , we denote the parametric form by  $[u]^\alpha = [u_{l\alpha}, u_{r\alpha}]$  for all  $0 \leq \alpha \leq 1$  and:

$len[u]^\alpha = u_{r\alpha} - u_{l\alpha}$  by the diameter of the  $\alpha$ -level set of  $u$ .

Supremum metric is the most commonly used metric on  $E$  defined by:

$$d_\infty(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d([u]^\alpha, [v]^\alpha) \text{ for all } u, v \in E,$$

where  $d$  is the Hausdorff metric distance in  $K_C$ ,

$$d(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\} \text{ with } A, B \in K_C$$

It is obviously that  $(E, d_\infty)$  is a complete metric space (see [2, 11]).

The addition and the multiplication by an scalar of fuzzy numbers in  $E$  are defined by levelsetwise, that is, for all  $u, v \in E$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $[u + v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha$  and  $[ku]^\alpha = k [u]^\alpha$ .

In special case  $(-1)[u]^\alpha = (-1)[u_{l\alpha}, u_{r\alpha}] = [-u_{r\alpha}, -u_{l\alpha}]$ .

If there exists  $w \in E$  such that  $u = v + w$ , we call  $w = u \ominus v$  the Hukuhara difference of  $u$  and  $v$ . Clearly,  $u \ominus u = \hat{0}$ , and if  $u \ominus v$  exists, it is unique (see [2]).

It is easy to see that  $u \ominus v \neq u + (-1)v$ . Moreover if  $u \ominus v$  exists, then

$$[u \ominus v]^\alpha = [u_{l\alpha} - v_l^\alpha, u_{r\alpha} - v_r^\alpha], \text{ for all } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

**Lemma 2.1.** [15] Let  $u, v, w, e \in E$  and suppose that the H-differences  $u \ominus v$ ;  $w \ominus e$  exist.

Then we have:

$$d_\infty(u \ominus v, w \ominus e) \leq d_\infty(u, w) + d_\infty(v, e).$$

**Definition 2.1.** [2, 3] For  $u, v \in E$ , the generalized Hukuhara difference of  $u$  and  $v$ , denoted by  $u \ominus_{gH} v$  is defined as the element  $w \in E$  such that

$$u \ominus_{gH} v = w \iff \begin{cases} (i) & u = v + w \text{ or} \\ (ii) & v = u + (-1)w. \end{cases}$$

Notice that if  $u \ominus_{gH} v$  and  $u \ominus v$  exist, then  $u \ominus_{gH} v = u \ominus v$ ; if (i) and (ii) in Definition are satisfied simultaneously, then  $w$  is a crisp number; also,  $u \ominus_{gH} u = \hat{0}$ , and if  $u \ominus_{gH} v$  exists, it is unique. It is the fact that  $u \ominus_{gH} v$  does not always exist in  $E$ , but there are some characterizations which guarantee the existence of  $u \ominus_{gH} v$  (see [2, 3]).

**Definition 2.2.** [15] Let  $I$  be a subset of  $\mathbb{R}^2$  and  $u$  be a mapping from  $I$  to  $E$ . We say that  $u$  is gH-differentiable with respect to  $x$  at  $(x_0, y_0) \in I$  if there exists an element such that

for all  $h$  be such that  $(x_0+h, y_0) \in I$ , the gH-difference with respect to  $x$  at  $(x_0, y_0) \in I$  if there exists an element:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \in E$$

such that for all  $h$  be such that  $(x_0+h, y_0) \in I$ , the gH-difference  $u(x_0+h, y_0) \ominus_{gH} u(x_0, y_0)$  exists and

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0+h, y_0) \ominus_{gH} u(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}$$

The gH-derivative of  $u$  with respect to  $y$  and higher order of fuzzy partial derivative  $u$  at the point  $(x_0, y_0) \in I$  are defined similarly.

**Definition 2.3.** [1, 15] Let  $u: I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E$  be gH-differentiable with respect to  $x$  at  $(x_0, y_0) \in I$  and  $[u(x, y)]^\alpha = [u_{l\alpha}(x, y), u_{r\alpha}(x, y)]$ , where  $u_{l\alpha}, u_{r\alpha}: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \in I$  and  $\alpha \in [0, 1]$ . We say that

(i)  $u$  is (i)-gH differentiable with respect to  $x$  at  $(x_0, y_0) \in I$  if

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \right]^\alpha = \left[ \frac{\partial u_{l\alpha}}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial u_{r\alpha}}{\partial x}(x_0, y_0) \right]$$

(ii)  $u$  is (ii)-gH differentiable with respect to  $x$  at  $(x_0, y_0) \in I$  if

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \right]^\alpha = \left[ \frac{\partial u_{r\alpha}}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial u_{l\alpha}}{\partial x}(x_0, y_0) \right]$$

The fuzzy (i)-gH and (ii)-gH derivative of  $u$  with respect to  $y$  and higher order of fuzzy partial derivative of  $u$  at the point  $(x_0, y_0) \in I$  are defined similarly.

**Definition 2.4.** [1] For any fixed  $x_0$ , we say that  $(x_0, y) \in I$  is a switching point for the differentiability of  $u$  with respect to  $x$ , if in any neighborhood  $V$  of  $(x_0, y) \in I$ , there exist points  $A(x_1, y), B(x_2, y)$  such that  $x_1 < x_0 < x_2$  and:

**(type I)**  $u$  is (i)-gH differentiable at  $A$  while  $u$  is (ii)-gH differentiable at  $B$  for all  $y$ , or

**(type II)**  $u$  is (i)-gH differentiable at  $B$  while  $u$  is (ii)-gH differentiable at  $A$  for all  $y$ .

**Definition 2.5.** Let  $u: I \rightarrow E$  be gH-differentiable with respect to  $x$  and  $\partial u/\partial x$  is gH-differentiable at  $(x_0, y_0) \in I$  with respect to  $y$ . We say that  $u$  is gH-differentiable of order 2 with respect to  $x, y$  in type 2 at  $(x_0, y_0) \in I$ , denoted by  $D^2_{xy}u(x_0, y_0)$ , if the type of gH-differentiability of both  $u$  and  $\partial u/\partial x$  are different. Then:

$$\left[ D^2_{xy}u(x_0, y_0) \right]^\alpha = \left[ \frac{\partial^2 u_{r\alpha}}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial^2 u_{l\alpha}}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right]$$

for all  $0 \leq \alpha \leq 1$ .



### 3. PROBLEM FORMULATION

Let  $(\Omega, F, P)$  be a complete probability space.

**Definition 3.1.** [21] A function  $u: \Omega \rightarrow E$  is called a random fuzzy variable, if for all  $\alpha \in [0, 1]$ , the set-valued mapping  $u_\alpha: \Omega \rightarrow K_C$  is a measurable multifunction, i.e.  $\{\omega \in \Omega \mid [u(\omega)]^\alpha \cap C \neq \emptyset\} \in F$  for every closed set  $C \subset R$ .

Let  $U \subset R^m$ . A mapping  $u: U \times \Omega \rightarrow E$  is said to be a fuzzy stochastic process if  $u(\cdot, \omega)$  is a fuzzy-valued function with any fixed  $\omega \in \Omega$  and  $u(v, \cdot)$  is a random fuzzy variable for any fixed  $v \in U$ .

A fuzzy stochastic process  $u: U \times \Omega \rightarrow E$  is called continuous if for almost every  $\omega \in \Omega$ , the trajectory  $u(\cdot, \omega)$  is a continuous function on  $U$  with respect to metric  $d_\infty$ .

In this paper, we consider following boundary valued problem of nonlinear wave equations:

$$\mathcal{D}_{xy}^2 u(x, y, \omega) \stackrel{JP.1}{=} f_\omega(x, y, u(x, y, \omega)), \quad (x, y) \in J = [0, a] \times [0, b], \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

with local condition:

$$u(x, 0, \omega) \stackrel{[0,a]P.1}{=} \nu_1(x, \omega); \quad u(0, y, \omega) \stackrel{[0,b]P.1}{=} \nu_2(y, \omega), \quad (2)$$

where  $\nu_1$  and  $\nu_2$  are fuzzy continuous stochastic processes satisfying:

$$\nu_1(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} \nu_2(0, \omega) \stackrel{P.1}{=} \hat{u}_0(\omega), \quad \nu_2(y, \omega) \ominus \hat{u}_0(\omega)$$

exists with P.1 for all  $y \in [0, b]$  and  $f_\omega(x, y, \cdot)$  ( $(x, y, \omega)$ ) satisfies following hypothesis:

**(H1)**  $f_\omega(x, y, \cdot): \Omega \rightarrow E$  is a random fuzzy variable for all  $(x, y) \in J$ ,  $\cdot \in E$ , and the mapping  $f_\omega(\cdot, \cdot, \cdot): J \times E \rightarrow E$  is a fuzzy jointly continuous mapping with P.1.

**(H2)** There exist a real continuous stochastic process  $L: J \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$  and a nonnegative random variable  $M: \Omega \rightarrow R_+$  such that:

$$d_\infty(f_\omega(x, y, \varphi), f_\omega(x, y, \psi)) \stackrel{JP.1}{\leq} L(x, y, \omega) d_\infty(\varphi, \psi), \quad \forall \varphi, \psi \in E$$

And:

$$d_\infty(f_\omega(x, y, q(x, y, \omega)), \hat{0}) \stackrel{JP.1}{\leq} M(\omega).$$

Here, for convenience, the formula  $\eta(\omega) \stackrel{P.1}{=} \mu(\omega)$  means that  $P(\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) = \mu(\omega)) = 1$  (or  $\eta(\omega) = \mu(\omega)$  almost everywhere) and similarly for inequalities. Also if we have  $P(\omega \in \Omega \mid u(v, \omega) = v(v, \omega), \forall v \in U) = 1$ , where  $u, v$  are fuzzy stochastic processes, then we will write  $u(v, \omega) \stackrel{U=P.1}{=} v(v, \omega)$  for short, similarly for the inequalities and other relations.

Thanks for Lemma 4.4 in [15], we have following definition.

**Definition 3.2.** A fuzzy continuous stochastic process  $u: J \times \Omega \rightarrow E$  is called a random fuzzy solution (in type 2) of the problem (1)-(2) if it satisfies following random integral equation

$$u(x, y, \omega) \stackrel{JP.1}{=} q(x, y, \omega) \ominus (-1) \int_0^x \int_0^y f_\omega(s, t, u(s, t, \omega)) dsdt, \quad (3)$$

Where  $q(x, y, \omega) \stackrel{JP.1}{=} \nu_1(x, \omega) + \nu_2(y, \omega) \ominus u_0$ .

#### 4. MAIN RESULTS

Following result shows the solvability of the problem (1)-(2) by using the method of successive approximations.

**Theorem 4.1.** Assume hypotheses  $(H_1)$  and  $(H_2)$  are satisfied. Moreover, assume that there exists a sequence  $u_n: J \times \Omega \rightarrow E$ ,  $n \in 0, 1, 2, \dots$ , defined by

$$\begin{cases} u_0(x, y, \omega) \stackrel{JP.1}{=} q(x, y, \omega) \\ u_n(x, y, \omega) \stackrel{JP.1}{=} q(x, y, \omega) \ominus (-1) \int_0^x \int_0^y f_\omega(s, t, u_{n-1}(s, t, \omega)) dsdt, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

in  $E$ . Then, the Problem (1)-(2) has a unique random fuzzy solution (in type 2) on  $J \times \Omega$ .

*Proof.* From the hypothesis, the Hukuhara inferences

$$q(x, y, \omega) \ominus (-1) \int_0^x \int_0^y f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)) dsdt$$

exist with P.1 for all  $(x, y) \in J$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , then from Theorem 5.1 in [8] we have

$$[q(x, y, \omega) \ominus (-1) I_{00}^{xy} f_\omega(u_n)]^\alpha = [q(x, y, \omega)]^\alpha \ominus [(-1) I_{00}^{xy} f_\omega(u_n)]^\alpha.$$

Since:

$$\omega \rightarrow \left[ \int_0^x \int_0^y f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)) dsdt \right]^\alpha$$

is measurable and  $[q(x, y, \omega)]^\alpha$  is also measurable, then

$$q(x, y, \omega) \ominus (-1) \int_0^x \int_0^y f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)) dsdt$$

are fuzzy stochastic processes for all  $n \in \mathbb{N}$ .

Since  $f$  satisfies  $(H_1)$ , applying to Lemma 5.3, it is easy to see that the functions  $u_n(\cdot, \cdot, \omega): J \rightarrow E$  are continuous with P.1. Then  $u_n(x, y, \omega)$  are also continuous fuzzy stochastic processes for all  $n \in \mathbb{N}^*$ .

We now prove that the sequence  $\{u_n(x, y, \omega)\}$  is uniformly convergent with P.1 on  $J$ .

Denote

$$T_n(x, y, \omega) = d_\infty(u_{n+1}(x, y, \omega), u_n(x, y, \omega)), \quad n \in \mathbb{N}$$

Observe that

$$\begin{aligned} T_n(x_m, y_m, \omega) - T_n(x, y, \omega) &= d_\infty(u_{n+1}(x_m, y_m, \omega), u_n(x_m, y_m, \omega)) - d_\infty(u_{n+1}(x, y, \omega), u_n(x, y, \omega)) \\ &\leq d_\infty(u_{n+1}(x_m, y_m, \omega), u_{n+1}(x, y, \omega)) + d_\infty(u_n(x, y, \omega), u_n(x_m, y_m, \omega)) \\ &\xrightarrow{\text{P.1}} 0 \end{aligned}$$

when  $(x_m, y_m) \rightarrow (x, y)$  with P.1 (see Lemma 5.2). Hence,  $T_n$  is a continuous function on  $J$  with P.1.

For all  $n > m > 0$ , from estimations of Lemma 5.2, we obtain

$$\begin{aligned} d_\infty(u_n(x, y, \omega), u_m(x, y, \omega)) &\leq \sum_{k=m+1}^n d_\infty(u_k(x, y, \omega), u_{k-1}(x, y, \omega)) \\ &\stackrel{JP.1}{\leq} \sum_{k=m+1}^n M(\omega) [\tilde{L}(\omega)]^{k-1} \frac{a^k}{k!} \frac{b^k}{k!} \\ &\sum_{n=1}^{\infty} M(\omega) [\tilde{L}(\omega)]^{n-1} \frac{a^n}{n!} \frac{b^n}{n!} \end{aligned}$$

The almost sure convergence of the series implies that the  $(E, d_\infty)$  is a complete metric space, there exists  $\Omega_c \subset \Omega$  such that  $P(\Omega_c) = 1$  and for every  $\omega \in \Omega_c$  the sequence  $\{u_n(\cdot, \cdot, \omega)\}$  is uniformly convergent. For  $\omega \in \Omega_c$  denote its limit by

Define  $u: J \times \Omega \rightarrow E$  by

$$u(\cdot, \cdot, \omega) = \begin{cases} \tilde{u}(\cdot, \cdot, \omega) & \text{if } \omega \in \Omega_c \\ \text{freely chosen} & \text{if } \omega \in \Omega \setminus \Omega_c \end{cases}$$

It is easy to see that  $u(\cdot, \cdot, \omega)$  is continuous with P.1. From

$$d_\infty([u_n(x, y, \omega)]^\alpha, [u(x, y, \omega)]^\alpha) \xrightarrow{JP.1} 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

we infer that  $[u(x, y, \cdot)]^\alpha$  is a measurable multivalued function. Therefore  $u$  is a continuous fuzzy stochastic process.

In another way, for any  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f\omega(x, y, u_n(x, y, \omega))$  are continuous fuzzy stochastic processes and for all  $n > m > 0$

$$\sup_{(x,y) \in J} (d_\infty(f\omega(x, y, u_n(x, y, \omega)), f\omega(x, y, u_m(x, y, \omega)))) \stackrel{\mathbb{P}.1}{\leq} \tilde{L}(\omega) \sup_{(x,y) \in J} d_\infty(u_n(x, y, \omega), u_m(x, y, \omega)).$$

Then the sequence  $\{f\omega(x, y, u_n(x, y, \omega))\}$  is a Cauchy sequence on  $J$  with P.1 and it converges to  $f\omega(x, y, u(x, y, \omega))$  when  $n \rightarrow \infty$  for all  $(x, y) \in J$  with P.1. Then

$$\begin{aligned} & d_\infty(u(x, y, \omega) + (-1) \int_0^x \int_0^y f_\omega(s, t, u(s, t, \omega)) ds dt, q(x, y, \omega)) \\ & \stackrel{J\mathbb{P}.1}{=} d_\infty(u(x, y, \omega) + (-1) I_{00}^{xy}(u), u_n(x, y, \omega) + (-1) I_{00}^{xy}(u_{n-1})) \\ & \leq d_\infty(u(x, y, \omega), u_n(x, y, \omega)) + d_\infty(I_{00}^{xy}(u), I_{00}^{xy}(u_{n-1})) \\ & \stackrel{J\mathbb{P}.1}{\leq} d_\infty(u(x, y, \omega), u_n(x, y, \omega)) + \int_0^x \int_0^y L(s, t, \omega) d_\infty(u(s, t, \omega), u_{n-1}(s, t, \omega)) ds dt \\ & \stackrel{J\mathbb{P}.1}{\leq} (1 + \tilde{L}(\omega)ab) \cdot d_\infty(u(x, y, \omega), u_n(x, y, \omega)) \xrightarrow{J\mathbb{P}.1} 0 \end{aligned}$$

Therefore  $u(x, y, \omega)$  satisfies random fuzzy integral equation (3) or  $u$  is a random fuzzy solution in type 2 of the Problem (1)-(2).

Assume that  $u, v: J \times \Omega \rightarrow E$  are two continuous stochastic processes which are solutions of the problem. Note that

$$d_\infty(u(x, y, \omega), v(x, y, \omega)) \stackrel{J\mathbb{P}.1}{\leq} 0 + \int_0^x \int_0^y L(s, t, \omega) d_\infty(u(s, t, \omega), v(s, t, \omega))$$

Thanks for the Gronwall's inequality in Lemma 5.1, we obtain:

$$d_\infty(u(x, y, \omega), v(x, y, \omega)) \stackrel{J\mathbb{P}.1}{\leq} 0 \cdot \exp\left\{\int_0^x \int_0^y L(s, t, \omega) ds dt\right\} = 0 \quad (5)$$

The theorem is proved completely.

Now we consider the Darboux problems for (1) with following local condition:

$$u(x, 0, \omega) \stackrel{[0,a]\mathbb{P}.1}{=} \nu_1(x, \omega) + \varepsilon_1(x, \omega); \quad u(0, y, \omega) \stackrel{[0,b]\mathbb{P}.1}{=} \nu_2(y, \omega) + \varepsilon_2(y, \omega),$$

where  $\varepsilon_k(\cdot, \omega)$ ,  $k = 1, 2$ , are small noisy fuzzy random variables. Following theorem gives continuous dependence of random fuzzy solutions to data of the problems and the stability of behavior of solutions.

**Theorem 4.2.** Assume that all the hypotheses of Theorem 4.1 are satisfied. And assume that  $u(.,.,.)$  is a random fuzzy solution of (1) with local boundary condition (2) and  $v(.,.,.)$  is a fuzzy stochastic processes which satisfies

$$v(x, y, \omega) \stackrel{JP.1}{=} q_\epsilon(x, y, \omega) \ominus (-1) \int_0^x \int_0^y f_\omega(s, t, v(s, t, \omega)) dsdt, \tag{6}$$

where  $q_\epsilon(x, y, \omega) = q(x, y, \omega) + \epsilon(x, y, \omega)$ ,  $\epsilon(x, y, \omega) := \epsilon_1(x, \omega) + \epsilon_2(y, \omega)$  for all  $(x, y) \in J$ .

Then

$$d_\infty(u(x, y, \omega), v(x, y, \omega)) \stackrel{JP.1}{\leq} Cd_\infty(\epsilon(x, y, \omega), \hat{0}), \tag{7}$$

where  $C$  is a positive constant which does not depend on  $u(.,.,.)$  or  $v(.,.,.)$ .

*Proof.* Denote

$$P(x, y, \omega) = d_\infty(u(x, y, \omega), v(x, y, \omega))$$

for  $\omega \in \Omega$ ,  $(x, y) \in J$ . It is easy to see from hypothesis (H1) that  $P(x, y, \omega)$  is a real stochastic process. Thanks for hypothesis (H2) we have:

$$\begin{aligned} P(x, y, \omega) &\stackrel{JP.1}{\leq} d_\infty(q_1(x, y, \omega), q_2(x, y, \omega)) + \int_0^x \int_0^y d_\infty(f_\omega(s, t, u(s, t, \omega)), f_\omega(s, t, v(s, t, \omega))) dsdt \\ &\stackrel{JP.1}{\leq} P(0, 0, \omega) + \int_0^x \int_0^y L(s, t, \omega) P(s, t, \omega) dsdt. \end{aligned}$$

Applying Gronwall's inequality in Lemma 5.1 we receive

$$P(x, y, \omega) \stackrel{JP.1}{\leq} P(0, 0, \omega) \exp\left\{ \int_0^x \int_0^y L(s, t, \omega) dsdt \right\}$$

From (6) we have

$$P(0, 0, \omega) = d_\infty(q(x, y, \omega), q_\epsilon(x, y, \omega)) = d_\infty(\epsilon(x, y, \omega), \hat{0}).$$

Since  $(x, y) \in J$ , then

$$\exp\left\{ \int_0^x \int_0^y L(s, t, \omega) dsdt \right\} \leq \exp\{ab\tilde{L}(\omega)\} := C > 0.$$

Thus (7) holds. The theorem is proved completely.

## 5. APPENDIX

**Lemma 5.1.** (Gronwall's Lemma) Let  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  be a probability space,  $A: \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  be a real random variable and  $u, c: U \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  be real stochastic processes such that

- a)  $u(\cdot, \cdot, \omega)$  is nonnegative and continuous with P.1 on  $U$ ;  
 b)  $c(\cdot, \cdot, \omega)$  is nonnegative, locally Lebesgue integrable on  $U$  with P.1;  
 c) furthermore following inequality hold

$$u(x, y, \omega) \stackrel{UP.1}{\leq} A(\omega) + \int_0^x \int_0^y c(s, t, \omega) u(s, t, \omega) ds dt. \quad (8)$$

Then we have:

$$u(x, y, \omega) \stackrel{UP.1}{\leq} A(\omega) \exp\left(\int_0^x \int_0^y c(s, t, \omega) ds dt\right) \quad (9)$$

$$v(x, y, \omega) = A(\omega) + \int_0^x \int_0^y c(s, t, \omega) u(s, t, \omega) ds dt$$

*Proof.* Let for  $(x, y) \in U$ .

From (8) we have:

$$u(x, y, \omega) \stackrel{UP.1}{\leq} v(x, y, \omega). \text{ Since } u(\cdot, \cdot, \omega); c(\cdot, \cdot, \omega)$$

is nonnegative with P.1 then  $v(\cdot, \cdot, \omega)$  is nondecreasing in each variable  $x, y$  and  $v(0, y, \omega) = A(\omega)$ . We have:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y, \omega) = \int_0^y c(x, t, \omega) u(x, t, \omega) dt.$$

Since  $u(x, t, \omega) \stackrel{UP.1}{\leq} v(x, t, \omega) \stackrel{UP.1}{\leq} v(x, y, \omega)$  for all  $t \in [0, y]$  then

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y, \omega) \stackrel{UP.1}{\leq} v(x, y, \omega) \int_0^y c(x, t, \omega) dt.$$

Therefore:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \exp\left(-\int_0^x \int_0^y c(s, t, \omega) ds dt\right) v(x, y, \omega) \right] \\ &= \left[ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y, \omega) - v(x, y, \omega) \int_0^y c(x, t, \omega) dt \right] \exp\left(-\int_0^x \int_0^y c(s, t, \omega) ds dt\right) \\ & \stackrel{UP.1}{\leq} 0. \end{aligned}$$

It follows:

$$\exp\left(-\int_0^x \int_0^y c(s, t, \omega) ds dt\right) v(x, y, \omega) \stackrel{UP.1}{\leq} e^0 v(0, y, \omega) = A(\omega)$$

Or:

$$v(x, y, \omega) \stackrel{UP.1}{\leq} A(\omega) \exp\left(\int_0^x \int_0^y c(s, t, \omega) ds dt\right)$$

Thus:

$$u(x, y, \omega) \stackrel{UP.1}{\leq} A(\omega) \exp\left(\int_0^x \int_0^y c(s, t, \omega) ds dt\right)$$

It completes the proof of this lemma.

**Lemma 5.2.** *Suppose that hypotheses  $(H_1)$  and  $(H_2)$  are satisfied. Following estimations hold for all  $n \geq 1$*

$$d_\infty(u_n(x, y, \omega), u_{n-1}(x, y, \omega)) \stackrel{JP.1}{\leq} M(\omega) [\tilde{L}(\omega)]^{n-1} \frac{a^n b^n}{n! n!} \tag{10}$$

where  $u_n(\dots, \omega): J \rightarrow E, n \geq 0$  are defined by (4) and

$$\tilde{L}(\omega) = \sup_{(x,y) \in J} L(x, y, \omega) < \infty$$

*Proof.* Denote

$$I_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} v = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_\omega(s, t, v(s, t, \omega)) ds dt.$$

By mathematical induction, we will prove (10) for every  $n \geq 1$ . In fact, we observe that

$$\begin{aligned} d_\infty(u_1(x, y, \omega), u_0(x, y, \omega)) &\stackrel{JP.1}{\leq} d_\infty\left(\int_0^x \int_0^y f_\omega(s, t, u_0(s, t, \omega)) ds dt, \hat{0}\right) \\ &\stackrel{JP.1}{\leq} \int_0^x \int_0^y d_\infty(f_\omega(s, t, u_0(s, t, \omega)), \hat{0}) ds dt \\ &\stackrel{JP.1}{\leq} M(\omega) ab. \end{aligned}$$

Moreover,

$$\begin{aligned}
d_\infty(u_2(x, y, \omega), u_1(x, y, \omega)) &\stackrel{JP.1}{\leq} d_\infty(I_{00}^{xy}u_1, I_{00}^{xy}u_0) \\
&\leq \int_0^x \int_0^y d_\infty(f_\omega(s, t, u_1(s, t, \omega)), f_\omega(s, t, u_0(s, t, \omega))) ds dt \\
&\stackrel{JP.1}{\leq} \tilde{L}(\omega) \int_0^x \int_0^y d_\infty(u_1(s, t, \omega), u_0(s, t, \omega)) ds dt \\
&\stackrel{JP.1}{\leq} \tilde{L}(\omega) \int_0^x \int_0^y M(\omega) s t ds dt \\
&\stackrel{JP.1}{\leq} \tilde{L}(\omega) M(\omega) \frac{a^2 b^2}{2!2!}.
\end{aligned}$$

Thus (10) is true for  $n = 1$ . Now, we assume that the inequality (10) is true for any  $n \geq 1$ . We will prove that it is also true for  $n + 1$ . Indeed

$$\begin{aligned}
d_\infty(u_{n+1}(x, y, \omega), u_n(x, y, \omega)) &\leq d_\infty(I_{00}^{xy}u_n, I_{00}^{xy}u_{n-1}) \\
&\stackrel{JP.1}{\leq} \int_0^x \int_0^y d_\infty(f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)), f_\omega(s, t, u_{n-1}(s, t, \omega))) ds dt \\
&\stackrel{JP.1}{\leq} \tilde{L}(\omega) \int_0^x \int_0^y d_\infty(u_n(s, t, \omega), u_{n-1}(s, t, \omega)) ds dt \\
&\stackrel{JP.1}{\leq} \tilde{L}(\omega) \int_0^x \int_0^y M(\omega) [\tilde{L}(\omega)]^{n-1} \frac{s^n t^n}{n! n!} ds dt \\
&\stackrel{JP.1}{\leq} [\tilde{L}(\omega)]^n M(\omega) \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Therefore (10) holds for all  $n + 1$ , the proof is completed.

**Lemma 5.3.** Under hypotheses  $(H_1)$  and  $(H_2)$ ,  $u_n(\dots, \omega): J \rightarrow E$ ,  $n \geq 0$  defined by (4) are continuous on  $J$  with P.1.

*Proof.* Indeed,  $u_0(x, y, \omega)$  is natural continuous on  $J$ . Fixed  $(x, y) \in J$ , consider an arbitrary sequence  $\{(x_m, y_m)\}$  that converges to  $(x, y)$  as  $m \rightarrow \infty$ . For fixed  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $(x_m, y_m) \in J$ , there are four cases happening.

Case 1. When  $x < x_m$ ,  $y < y_m$ , one has following presentation

$$\int_0^{x_m} \int_0^{y_m} f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)) ds dt = I_{00}^{xy}(u_n) + I_{x0}^{x_m y}(u_n) + I_{0y}^{x y_m}(u_n) + I_{x y}^{x_m y_m}(u_n) \quad (11)$$



Case 2. If  $x \geq x_m, y \geq y_m$  then

$$\int_0^x \int_0^y f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)) ds dt = I_{00}^{x_m y_m}(u_n) + I_{0y_m}^{x_m y}(u_n) + I_{x_m 0}^{x y_m}(u_n) + I_{x_m y_m}^{x y}(u_n)$$

Case 3. If  $x < x_m, y \geq y_m$  then

$$\begin{aligned} \int_0^{x_m} \int_0^{y_m} f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)) ds dt &= I_{00}^{x y_m}(u_n) + I_{x_0}^{x_m y_m}(u_n) \\ \int_0^x \int_0^y f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)) ds dt &= I_{00}^{x y_m}(u_n) + I_{0y_m}^{x y}(u_n). \end{aligned} \tag{12}$$

Case 4. If  $x \geq x_m, y < y_m$  then

$$\begin{aligned} \int_0^{x_m} \int_0^{y_m} f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)) ds dt &= I_{00}^{x_m y}(u_n) + I_{0y}^{x_m y_m}(u_n) \\ \int_0^x \int_0^y f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)) ds dt &= I_{00}^{x_m y}(u_n) + I_{x_m 0}^{x y}(u_n). \end{aligned}$$

Now for  $n \geq 1$ , from presentation (11) in Case 1, we have

$$\begin{aligned} d_\infty(u_{n+1}(x_m, y_m, \omega), u_{n+1}(x, y, \omega)) &\stackrel{JP.1}{\leq} d_\infty(I_{00}^{x_m y_m}(u_n, \omega), I_{00}^{x y}(u_0)) \\ &\leq \int_0^x \int_y^{y_m} d_\infty(f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)), \hat{0}) ds dt + \int_x^{x_m} \int_0^y d_\infty(f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)), \hat{0}) ds dt \\ &\quad + \int_x^{x_m} \int_y^{y_m} d_\infty(f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)), \hat{0}) ds dt \end{aligned} \tag{13}$$

From the hypothesis (H2) and the inequality (10) in Lemma 5.2 we have

$$\begin{aligned} d_\infty(f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)), \hat{0}) &\leq \sum_{k=1}^n d_\infty(f_\omega(s, t, u_k(s, t, \omega)), f_\omega(s, t, u_{k-1}(s, t, \omega))) \\ &\quad + d_\infty(f_\omega(s, t, u_0(s, t, \omega)), \hat{0}) \\ &\stackrel{JP.1}{\leq} \tilde{L}(\omega) \sum_{k=1}^n d_\infty(u_k(s, t, \omega), u_{k-1}(s, t, \omega)) + M(\omega) \\ &\stackrel{JP.1}{\leq} \tilde{L}(\omega) \sum_{k=1}^n M(\omega) [\tilde{L}(\omega)]^{k-1} \frac{a^k b^k}{k! k!} + M(\omega) = A(\omega). \end{aligned} \tag{14}$$

Therefore

$$\int_0^x \int_y^{y_m} d_\infty(f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)), \hat{0}) ds dt \stackrel{JP.1}{\leq} A(\omega)a|y - y_m|.$$

Do the same arguments to the second and the third items of (13), we receive following estimates for all  $n \in \mathbb{N}^*$

$$d_\infty(u_{n+1}(x_m, y_m, \omega), u_{n+1}(x, y, \omega)) \stackrel{JP.1}{\leq} A(\omega)(a|y - y_m| + b|x - x_m| + |x - x_m||y - y_m|). \quad (15)$$

Now we consider Case 3:  $x < x_m, y \geq y_m$ . Using presentation (12) we have:

$$\begin{aligned} d_\infty(u_{n+1}(x_m, y_m, \omega), u_{n+1}(x, y, \omega)) &\leq d_\infty(I_{00}^{x_m y_m}(u_n), I_{00}^{xy}(u_n)) \\ &\stackrel{JP.1}{=} d_\infty(I_{00}^{x y_m}(u_n) + I_{x0}^{x_m y_m}(u_n), I_{00}^{x y_m}(u_n) + I_{0 y_m}^{xy}(u_n)) \\ &\stackrel{JP.1}{\leq} d_\infty\left(\int_x^{x_m} \int_0^{y_m} f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)) ds dt, \hat{0}\right) + d_\infty\left(\int_0^x \int_{y_m}^y f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)) ds dt, \hat{0}\right) \\ &\stackrel{JP.1}{\leq} \int_x^{x_m} \int_0^{y_m} d_\infty(f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)), \hat{0}) ds dt + \int_0^x \int_{y_m}^y d_\infty(f_\omega(s, t, u_n(s, t, \omega)), \hat{0}) ds dt \\ &\stackrel{JP.1}{\leq} A(\omega)(|x - x_m|b + a|y - y_m|) \end{aligned} \quad (16)$$

for all  $n \in \mathbb{N}$ .

Repeating all the arguments in (15) and (16) for Case 2 and Case 4, we receive the same estimations. Now let  $(x_m, y_m)$  tends to  $(x, y)$  then  $|x - x_m|, |y - y_m|$  tend to zero, too. It implies from (15) and (16) that for every  $n \in \mathbb{N}$ , functions  $u_n(\cdot, \omega): J \rightarrow E$  are continuous with P.1.

## 6. CONCLUSION

Random fuzzy local boundary valued problems for partial hyperbolic equations are studied under gH-differentiability. We prove the existence and uniqueness of random fuzzy solutions in type 2. The uniqueness here is understood that each considering solution does not have switching points. The method of successive approximations is used instead of applying the frequently used fixed point method, which were applied in [13]-[20]. This research provides the foundations for the further studying on the asymptotic behavior of random fuzzy solutions of partial differential equations.

## REFERENCES

1. T. Allahviranloo, Z. Gouyandeh, A. Armand, A. Hasanoglu (2015), “On fuzzy solutions for heat equation based on generalized Hukuhara differentiability”, *Fuzzy Sets Syst.* 265, pp.1-23.
2. B. Bede (2013), “Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic”, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*.
3. B. Bede and L. Stefanini (2013), “Generalized differentiability of fuzzy-valued functions”, *Fuzzy Sets Syst.* 230, pp.119-141.
4. C. Castaing, M. Valadier, *Lecture Notes in Mathematics* (1997), “Convex Analysis and Measurable Multifunctions”, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork*.
5. V. Durikovic (1968), “On the uniqueness of solutions and the convergence of successive approximations in the Darboux problem for certain differential equations of the type  $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ ”, *Archivum Mathematicum.* 4, pp.223-235.
6. W. Fei (2007), “Existence and uniqueness of solutions for fuzzy random differential equations with non-Lipschitz coefficients”, *Inf. Sci.* 177, pp.4329-4337.
7. R. Guo and D. Guo (1009), “Random fuzzy variable foundation for Grey differential equation modeling”, *150 Soft Comput.* 13(2), pp.185-201.
8. N.T. Hung (1978), “A note on the extension principle for fuzzy set”, *J. Math. Anal. Appl.* 64, pp.369-380.
9. X. Ji, J. Zhou (2015), “Multi-dimensional uncertain differential equation: existence and uniqueness of solution, Fuzzy Optim”. *Decis. Mak.* 14(4), pp.477-491.
10. A. Khastan, J.J. Neito, R. (2014), “Rodríguez-L’opez, Fuzzy delay differential equations under generalized differentiability”, *Inf. Sci.* 275, pp.145-167.
11. V. Lakshmikantham and R.N. Mohapatra (2003), “Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions”, *Taylor and Francis Publishers, London*
12. J. Li and J. Wang (2012), “Fuzzy set-valued stochastic Lebesgue integral”, *Fuzzy Sets Syst.* 200, pp.48-64.
13. H.V. Long, N.K. Son, N.M. Ha, L.H. Son (2014), “The existence and uniqueness of fuzzy solutions for hyperbolic partial differential equations”, *Fuzzy Optim. Decis. Mak.* 13(4), pp.435-462.
14. H.V. Long, N.T.K.Son, N.V. Hoa (2017), “Fuzzy fractional partial differential equations in partially ordered metric spaces”, *Iran. J. Fuzzy Syst.* 14, pp.107-126.
15. H.V. Long, N.K. Son, H.T. Tam (2015), “Global existence of solutions to fuzzy partial hyperbolic functional differential equations with generalized Hukuhara derivatives”, *J. Intell. Fuzzy Syst.* 29(2), pp.939-954.
16. H.V. Long, N.K. Son, H.T. Tam (2017), “The solvability of fuzzy fractional partial differential equations under Caputo gH-differentiability”, *Fuzzy Sets Syst.* 309, pp.35-63.
17. [17] H.V. Long, N.K. Son, H.T. Tam, B.C. Cuong (2014), “On the existence of fuzzy solutions for partial hyperbolic functional differential equations”, *Int. J. Comp. Intell. Syst.* 7(6), pp.1159-1173.
18. H.V. Long, N.K. Son, R.R. Lopez (2017), “Some generalizations of fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications to fuzzy partial differential equations”, *Vietnam Journal of Mathematics*, in press.

19. H.V. Long, J.J. Nieto, N.T.K. Son (2017), "New approach to study nonlocal problems for differential systems and partial differential equations in generalized fuzzy metric spaces", *Fuzzy Sets Syst.*, <http://doi.org/10.1016/j.fss.2016.11.008>.
20. H.V. Long, N.T.K. Son, H.T.T. Tam and J-C. Yao (2017), "Ulam stability for fractional partial integro-differential equation with uncertainty", *Acta Mathematica Vietnamica*, DOI: 410.1007/s40306-017-0207-2.
21. M.T. Malinowski, R.P. Agarwal (2015), "On solutions to set-valued and fuzzy stochastic differential equations, J. Franklin Institute 352(8), pp.3014-3043.
22. M.T. Malinowski (2015), "Random fuzzy fractional integral equations - theoretical foundations", *Fuzzy Sets Syst.* 265, pp.39-62.
23. M.T. Malinowski (2013), "Approximation schemes for fuzzy stochastic integral equations", *Appl. Math. Comput.* 219(24), pp.11278-11290.
24. M.T. Malinowski (2012), "Random fuzzy differential equations under generalized Lipschitz condition", *Nonlinear Anal.* (RWA) 13, pp.860-881.
25. M.T. Malinowski (2009), "On random fuzzy differential equations", *Fuzzy Sets Syst.* 160, pp.3152-3165.

## NGHIỆM LOẠI 2 CỦA PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN SÓNG MỜ NGẪU NHIÊN DƯỚI ĐẠO HÀM HUKUHARA TỔNG QUÁT

**Tóm tắt:** Bài báo nghiên cứu về phương trình truyền sóng mờ ngẫu nhiên dưới đạo hàm Hukuhara tổng quát. Thông qua phương pháp xấp xỉ liên tiếp, sự tồn tại, tính duy nhất và sự phụ thuộc liên tục vào các dữ kiện ban đầu của nghiệm mờ ngẫu nhiên loại 2 được chứng minh. Khó khăn chính trong hướng nghiên cứu này không chỉ phụ thuộc vào khái niệm của quá trình ngẫu nhiên mờ - trong đó yêu cầu tính đo được của các hàm nhiều biến đa trị, mà còn phụ thuộc vào các phép toán giải tích mờ liên quan đến đạo hàm Hukuhara tổng quát của hàm mờ nhiều biến. Khi các khó khăn đó được giải quyết, chúng ta nhận được nghiệm mờ ngẫu nhiên có bán kính tập mức giảm theo thời gian, phù hợp với nhiều bài toán đặt ra trong thực tế.

**Từ khóa:** Phương trình truyền sóng mờ ngẫu nhiên, đạo hàm gH, bổ đề Gronwall, sự tồn tại, tính duy nhất, tính giải được, tính bị chặn, nghiệm mờ.

## HỆ THỐNG CHỨNG THỰC VĂN BẢN PHÁP LÝ - GIẢI PHÁP THÚC ĐẨY CHÍNH PHỦ ĐIỆN TỬ

Nguyễn Ái Việt

Viện Công nghệ Thông tin, Đại học Quốc gia Hà Nội

**Tóm tắt:** Bài viết đề xuất một hệ thống chứng thực văn bản pháp lý cho phép người dân và doanh nghiệp có thể mở tài khoản lưu tất cả các văn bản pháp lý sau khi đã được thẩm định tính pháp lý. Hệ thống này sẽ được kết nối với tất cả các dịch vụ công, cho phép tiến hành kiểm định các giấy tờ này nhanh hơn. Đây có thể xem là một giải pháp có hiệu quả nhằm thúc đẩy nhanh quá trình cải cách hành chính, tiến tới xây dựng “Chính phủ điện tử”, đáp ứng các yêu cầu quản lý hành chính vĩ mô.

**Từ khóa:** Hệ thống chứng thực, văn bản pháp lý, cải cách hành chính, chính phủ điện tử.

Nhận bài ngày 17.6.2017; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 10.9.2017

Liên hệ tác giả: Nguyễn Ái Việt; Email: aivietn@gmail.com

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hiện nay, việc xây dựng Chính phủ điện tử đã trở thành một trào lưu phổ biến trên phạm vi toàn cầu. Triển khai các dịch vụ công mang lại lợi ích cho người dân sẽ là mục tiêu cao nhất của Chính phủ điện tử. Ý nghĩa lớn nhất của dịch vụ công là mang lại lợi ích cho người dân qua đó xây dựng lòng tin của người dân đối với chính phủ [1-2]. Ngược lại, việc cung cấp dịch vụ công sẽ có tác động trở lại làm các hoạt động và tổ chức của Chính phủ ngày càng hoàn thiện hơn, đúng với mục đích của nó. Việc xây dựng các dịch vụ công có sự phối hợp của nhiều cơ quan là một thách thức lớn về công nghệ và quy trình nghiệp vụ. Theo báo cáo của Gardner, trước năm 2002, có tới 75% các dự án ứng dụng CNTT. Điều đó đòi hỏi các chương trình xây dựng Chính phủ điện tử cần phải theo một quy hoạch thống nhất theo phương pháp Enterprise Architecture hoặc Interoperability Framework [3-7].

Một thực tế thường xảy ra là các dịch vụ công sẽ không cải thiện được chất lượng phục vụ công dân, nếu vẫn còn một số khâu ách tắc. Đặc biệt là ách tắc về hồ sơ giấy tờ. Người dân vẫn mất nhiều thời gian vào những công việc lặp đi lặp lại để chuẩn bị các hồ sơ, giấy tờ pháp lý và phải đợi các công chức, thường không đủ năng lực thẩm định tính

pháp lý của các giấy tờ đó, xem xét và quyết định, thường là cảm tính, về tính pháp lý của các giấy tờ này.

Khắc phục ách tắc về hồ sơ, giấy tờ là một trong những mục tiêu quan trọng của các chương trình xây dựng Chính phủ điện tử và Cải cách hành chính trên thế giới. Tiết kiệm được thời gian cho việc xử lý các dịch vụ công, sẽ tạo ra những hiệu quả kinh tế, xã hội trực tiếp. Việc triển khai các ứng dụng công nghệ thông tin và dịch vụ một cửa liên thông đã chứng tỏ được hiệu quả trong việc nâng cao chất lượng và rút ngắn thời gian xử lý các dịch vụ hành chính công. Để cải tiến hơn nữa việc cung cấp các dịch vụ hành chính công, nhiều nơi trên thế giới đã tách một số bước liên quan tới kiểm tra hồ sơ công văn giấy tờ, chụp ảnh, lấy vân tay,... trong các dịch vụ hành chính công thành các dịch vụ độc lập, có thể giao cho các đơn vị chuyên trách hoặc các doanh nghiệp tổ chức thực hiện [8-9]. Tại 19 bang ở Mỹ đã có trên 100 trạm thực hiện các dịch vụ lấy vân tay, chụp ảnh, công chứng, chứng nhận lý lịch pháp lý,... để sử dụng cho các dịch vụ công.

Với các dịch vụ như vậy, hàng đợi tại các cơ quan công quyền cung cấp dịch vụ hành chính công được giảm thiểu đáng kể. Do việc nhận hồ sơ trở nên đơn giản, thời gian xử lý một hồ sơ có thể ước lượng được chính xác, công dân có thể lấy giờ hẹn qua Internet hoặc Call Center, để không phải chờ đợi nộp hồ sơ. Các cơ quan công quyền cung cấp dịch vụ hành chính công không cần đầu tư thời gian và nhân sự vào việc kiểm soát, thẩm định hồ sơ, tinh giản được biên chế, tránh được sai sót, mà vẫn nâng cao được chất lượng dịch vụ.

Trong bài này chúng tôi đề xuất một hệ thống chứng thực văn bản pháp lý cho phép người dân và doanh nghiệp có thể mở tài khoản lưu tất cả các văn bản pháp lý như hộ khẩu, chứng minh thư, giấy đăng ký kết hôn, chứng nhận quyền sử dụng đất, giấy đăng ký xe, đăng ký kinh doanh,... sau khi đã được thẩm định tính pháp lý. Hệ thống này sẽ được kết nối với tất cả các dịch vụ công, cho phép tiến hành kiểm định các giấy tờ này nhanh hơn. Đặc biệt, các dịch vụ công yêu cầu bản chính vẫn có thể tiến hành song song không cần phải chờ đợi lẫn nhau. Bên cạnh đó, những giấy tờ thất lạc hoặc hư hại do hỏa hoạn, nước lụt, mối mọt, trong thời gian chờ cấp lại vẫn có thể được thay thế bằng thông tin trong hệ thống. Hệ thống này có thể là giải pháp đột phá đầy mạnh Chính phủ điện tử. Tuy nhiên, cần có những văn bản quy định để đảm bảo cơ sở pháp lý cho việc ứng dụng hệ thống này.

Mô hình này được đề xuất lần đầu tiên trong mô hình cơ quan điện tử 3 cấp cho Thành phố Hà Nội [6] như một giải pháp đột phá. Tuy nhiên, mô hình này cần được triển khai thực hiện trong một giải pháp kỹ thuật, kèm theo mô hình triển khai dịch vụ trong đó có xét tới các vấn đề pháp lý. Năm 2013, tác giả cũng đã triển khai thử nghiệm một mô hình với quy mô nhỏ tại Thừa Thiên Huế. Trong thực tế, việc triển khai hệ thống này trong địa

bản của một địa phương là hoàn toàn đầy đủ cơ sở pháp lý và thuộc về thẩm quyền của chính quyền địa phương. Tuy nhiên mô hình này còn thiếu nhiều chức năng, đặc biệt là các chức năng về đảm bảo an ninh dữ liệu, phân quyền, quản lý ở các phòng công chứng và tích hợp với các dịch vụ công ở cấp quận huyện do đó chưa thể triển khai rộng rãi. Từ năm 2015, tác giả đã hoàn thiện hệ thống này để ứng dụng thử nghiệm trên địa bàn Hà Nội với hiệu quả được phát huy ở mức độ cao hơn. Nếu đưa được ra đại trà, đây sẽ là giải pháp đột phá đưa việc ứng dụng CNTT tại thành phố Hà Nội thêm một bước tiến dài trở thành điểm sáng tiên phong của cả nước trong lĩnh vực này.

Trước mắt, hệ thống có thể áp dụng ngay ở các quy mô nhỏ hơn ở các văn phòng công chứng hoặc tại các cơ sở giáo dục đào tạo cấp bằng và chứng chỉ. Tại Mỹ, việc cung cấp bằng điểm và chứng nhận tốt nghiệp (tương đương với bằng) tại các trường đại học cũng trở thành dịch vụ. Với một lệ phí, sinh viên có thể yêu cầu trường đại học gửi bằng điểm, chứng nhận tốt nghiệp trực tiếp tới nơi họ yêu cầu, tránh sửa đổi, giả mạo.

## 2. MÔ HÌNH NGHIỆP VỤ CỦA GIẢI PHÁP

Hiện nay, Chính phủ đã chủ trương sớm hoàn tất các dịch vụ hành chính công ở mức độ 2 để nhanh chóng chuyển sang mức độ 3, tiến tới giao dịch và tương tác hoàn toàn trực tuyến. Một trong những yếu tố có thể gây khó khăn cho việc giao dịch hoàn toàn trực tuyến là việc nhiều thủ tục hành chính công yêu cầu phải có bản chính của các văn bản, giấy tờ có giá trị pháp lý như giấy phép kinh doanh, giấy khai sinh, hộ khẩu, chứng minh thư,....

Các giấy tờ văn bản này thường phải sử dụng thường xuyên cho các mục đích và các thủ tục hành chính công khác. Như vậy, các thủ tục hành chính công kéo dài sẽ cản trở các thủ tục khác. Mặt khác, các dịch vụ công đều yêu cầu có các chuyên viên đủ năng lực giám định tính pháp lý của các văn bản. Yêu cầu này không hề dễ dàng trong thực tế, do đó có thể dẫn tới việc phải chứng nhận, thẩm định lại các giấy tờ, gây ách tắc, tốn thời gian và công sức của công dân, doanh nghiệp và cơ quan công quyền. Đặc biệt các hồ sơ đăng ký kinh doanh, mô tả hàng hóa có thể lên tới hàng trăm trang, phải sao chép đóng quyển nhiều lần, không phù hợp với chủ trương giảm giấy tờ của Chính phủ.

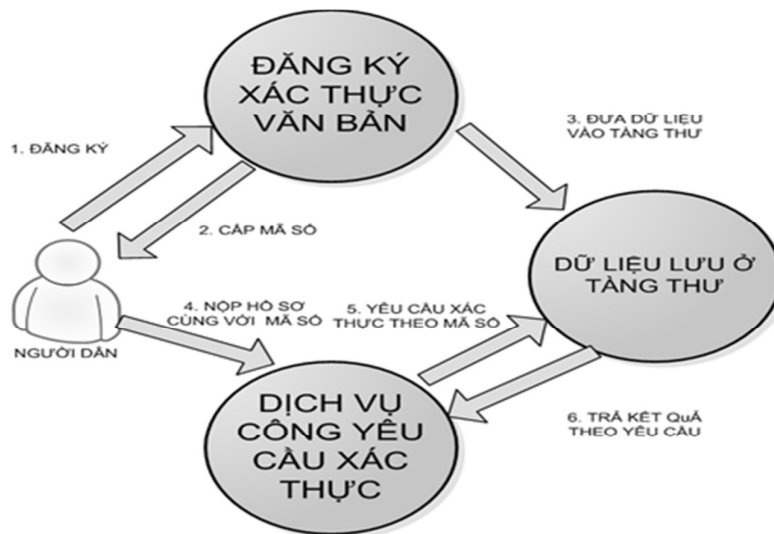
Do đó, nếu các văn bản, giấy tờ pháp lý được xác thực, kiểm soát kỹ càng, đưa vào một cơ sở dữ liệu, các dịch vụ công có thể lấy kết quả xác thực bằng cách truy vấn vào cơ sở dữ liệu này, tính xác tín sẽ được bảo đảm. Khi đó sẽ tiết kiệm được nhiều thời gian, tiền bạc và công sức của công dân, doanh nghiệp và của các cơ quan công quyền. Hiệu quả kinh tế và xã hội sẽ rất lớn. Trong mô hình hoạt động nghiệp vụ này, công dân và doanh nghiệp chỉ cần nộp các mã số của các văn bản, giấy tờ đã đăng ký tại các trung tâm dịch vụ

xác thực pháp lý cùng với hồ sơ khi sử dụng dịch vụ hành chính công. Việc nộp bản sao các văn bản này có thể cần thiết hoặc không. Tại dịch vụ một cửa, chuyên viên chỉ cần sử dụng các mã số để truy vấn để nhận được xác thực và bản sao. Các thông tin này sẽ được bổ sung vào hồ sơ để đưa đến cho bộ phận giải quyết hồ sơ.

Bên cạnh đó, các dịch vụ cung cấp giấy tờ pháp lý như chứng minh thư, hộ khẩu, bằng cấp, chứng chỉ, giấy đăng ký kết hôn, đăng ký xe, khai sinh, khai thuế, đăng ký kinh doanh,... đều có thể cho phép người dân sử dụng dịch vụ chứng thực ngay khi cấp. Các thông tin về văn bản này đều được đưa thẳng vào hệ thống ngay khi cấp, với một lệ phí sử dụng nhỏ như vậy việc đảm bảo tính pháp lý rất an toàn ở mức cao.

Để đảm bảo tính riêng tư về thông tin cá nhân, người dùng có thể đặt các chế độ “riêng tư” để chỉ bản thân họ có thể xem các văn bản này. Khi sử dụng dịch vụ công, họ có thể đặt chế độ “sử dụng”, khi đó các văn bản này sẽ được cấp mật mã truy cập tạm thời trong một khoảng thời gian nhất định. Các nhân viên hành chính làm việc trong các dịch vụ công, cũng có tài khoản trên hệ thống có thể sử dụng các mật mã này để truy cập vào các văn bản. Việc sử dụng các văn bản này được lưu vết, do đó các nhân viên không thể sử dụng các văn bản này vào các mục đích khác. Mặt khác, hết thời hạn sử dụng, văn bản tự động trở về chế độ “riêng tư”.

Như vậy, về mặt nghiệp vụ, hệ thống hoạt động theo quy trình mô tả trong sơ đồ sau:



### ***Kinh nghiệm quốc tế***

Dịch vụ lấy vân tay và các dịch vụ định danh các nhân (Finger Printing and Identity Services), ở Mỹ, chính phủ Liên bang cho phép thành lập một công ty theo hình thức Trust, để tạo điều kiện cho việc xã hội hoá. Trust này đã triển khai mạng lưới dịch vụ



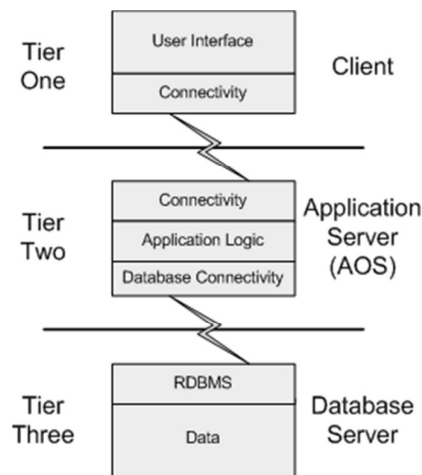
tại 17 bang, với gần 100 trạm dịch vụ chính thức và nhiều trạm dịch vụ uỷ quyền. <http://www.11enrollment.com/>. Để nhanh chóng mở rộng mạng lưới này, Trust cũng cho phép các tổ chức, doanh nghiệp, cá nhân đăng ký tham gia. Bên cạnh đó, nhiều công ty khác cũng được phép độc lập triển khai dịch vụ.

Chính các mô hình này sẽ quyết định kiến trúc công nghệ và yêu cầu hệ thống đối với phần mềm, phần cứng và giải pháp kết nối. Các mô hình nói trên hoàn toàn có thể mở rộng được cho các văn bản, giấy tờ tùy ý, đặc biệt là các văn bản, giấy tờ có nhu cầu thông dụng tại Việt Nam như hồ sơ đăng ký kinh doanh, giấy chứng nhận sở hữu nhà đất, giấy phép đăng ký hành nghề, các văn bằng chứng chỉ đào tạo, hồ sơ bệnh án, lý lịch pháp lý và các giấy tờ tùy thân khác,....

Trong nghiệp vụ chứng thực văn bản pháp lý, cần phân biệt các khái niệm “sao y bản chính”, “bản sao lục”, “bản sao chụp” và “bản công chứng”. Các bản “sao y bản chính” và “bản sao lục” có giá trị như bản chính. Bản sao chụp chỉ có giá trị tham khảo. “Bản công chứng” là việc người có chuyên môn được các cơ quan công quyền chứng nhận văn bản sao chụp phản ánh đúng nội dung của văn bản gốc, nhưng không chịu trách nhiệm về tính pháp lý của văn bản gốc.

### 3. PHÂN TÍCH YÊU CẦU CÔNG NGHỆ CỦA GIẢI PHÁP

Hệ thống chứng thực văn bản pháp lý là việc đưa các giao dịch nghiệp vụ về các giấy tờ, giao dịch lên môi trường điện tử nhằm tiết kiệm, thời gian, công sức và chi phí. Các hệ thống dịch vụ xác thực văn bản trên thế giới đều sử dụng ứng dụng trên nền Web based với kiến trúc ba lớp. Bao gồm lớp ứng dụng, lớp logic nghiệp vụ và lớp cơ sở dữ liệu như trong hình sau:



Trước hết để xây dựng hạ tầng công nghệ cho hệ thống nói trên, cần phải đưa ra một số tiêu chí bao gồm:

- a. Đảm bảo tính chính xác và tính đáp ứng của hệ thống
- b. Đảm bảo tính riêng tư về thông tin của công dân
- c. Đảm bảo hiệu năng, có thể phục vụ nhiều người
- d. Đảm bảo thân thiện, dễ dàng đối với người sử dụng
- e. Đảm bảo phối hợp dễ dàng giữa các cơ quan và các hệ thống hạ tầng khác nhau.

*Do đó, các công nghệ cần thiết cho hệ thống bao gồm:*

1. Cổng thông tin, sử dụng công nghệ Java hoặc .NET để có thể chuyển đổi giữa các nền khác nhau.
2. Cơ sở dữ liệu tin cậy, có thể quản lý được khối lượng dữ liệu lớn và có thể chuyển đổi một phần sang dữ liệu có cấu trúc. Có thể dùng công nghệ Sharepoint của Microsoft, một hệ thống quản lý tài liệu mã nguồn mở hoặc hệ thống quản lý văn bản riêng của một công ty.
3. Công nghệ mã hoá, chữ ký số và PKI
4. Xử lý phân tán, phân tải để đảm bảo cho máy chủ hoạt động tốt.
5. Xử lý ngôn ngữ, có chức năng tìm kiếm thông minh để đảm bảo thân thiện với người dùng.

Các công nghệ này một số đã có dưới dạng mã nguồn mở hoặc sản phẩm của các công ty. Tuy nhiên việc, phối hợp các công nghệ theo một kiến trúc và phục vụ tốt các yêu cầu nghiệp vụ là những việc cần phát triển thêm. Mặt khác trong điều kiện Việt Nam, cần xử lý tiếng Việt để tìm kiếm thông minh, giảm tốc độ gõ, tự động nhận dạng để cập nhật dữ liệu có cấu trúc và những vấn đề nhóm đề tài sẽ nghiên cứu để phát triển.

Hiện tại hệ thống đã được hoàn thiện với các luồng xử lý theo quy trình như sau:

*Bước 1:* Người dân có nhu cầu đăng ký văn bản mang văn bản tới các trạm xác thực để sử dụng dịch vụ xác thực. Các cơ quan ban hành các văn bản này cũng có thể cung cấp dịch vụ xác thực này trên cơ sở hoàn toàn tự nguyện của người dân.

*Bước 2:* Sau khi tính pháp lý của văn bản được thẩm định và xác thực bởi các chuyên viên, các chuyên viên sẽ nhập liệu và scan các văn bản cần thiết, người dân sẽ nhận được mã số cho văn bản của mình để sử dụng trong tương lai. Người dân có thể xem lại các mã số này nhờ việc truy cập tới một tài khoản trên một dịch vụ Web nối liền với tàng thư.

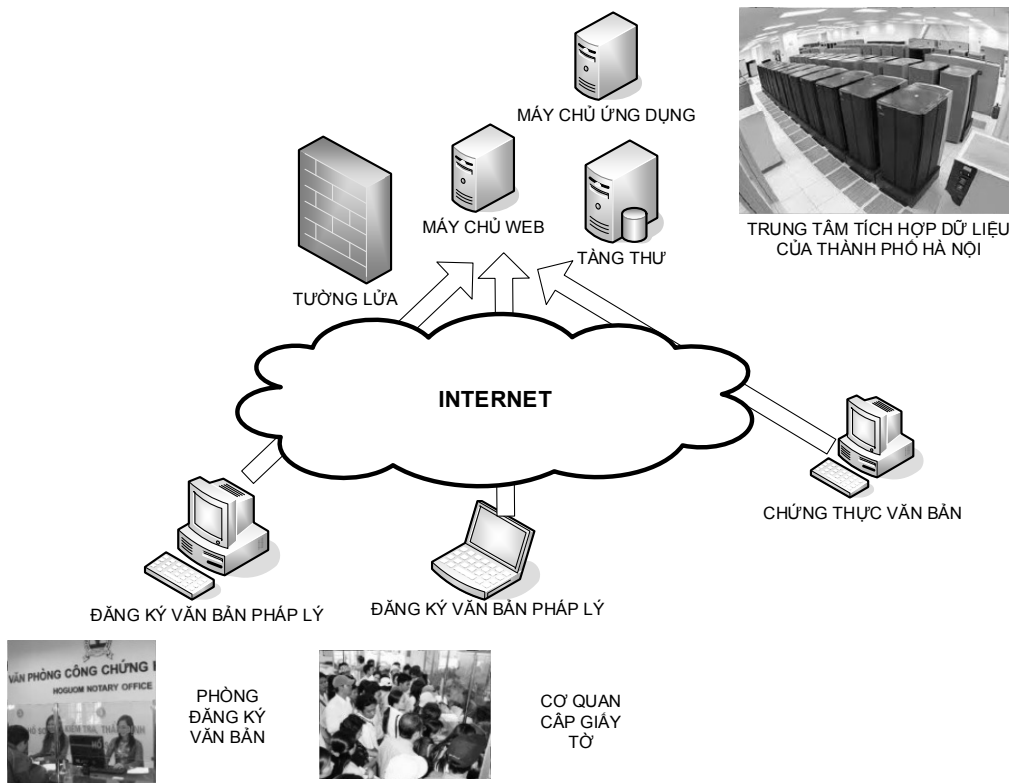
*Bước 3:* Dữ liệu được đưa lên và lưu ở Tàng thư.

*Bước 4:* Người dân nộp hồ sơ sử dụng dịch vụ công cùng với mã số của các văn bản cần xác thực.

*Bước 5:* Dịch vụ công dùng mã số để xác thực hoặc yêu cầu tải về ảnh của các văn bản cần thiết. Chuyên viên xử lý dịch vụ công sẽ căn cứ vào kết quả xác thực để ra quyết định.

#### 4. MÔ HÌNH TỔ CHỨC DỊCH VỤ VÀ HÀNH LANG PHÁP LÝ CHO VIỆC MỞ RỘNG RA PHẠM VI TOÀN QUỐC

Hệ thống chứng thực văn bản pháp lý có thể tổ chức thành dịch vụ, có thể sử dụng trung tâm tích hợp dữ liệu của thành phố nếu ứng dụng ở quy mô lớn. Ở một quy mô nhỏ hơn, có thể sử dụng dịch vụ của bên thứ ba theo mô hình sau đây:



Chính quyền địa phương như Thành phố Hà Nội hay tỉnh Thừa Thiên - Huế hoàn toàn có đủ thẩm quyền ban hành quy định công nhận tính pháp lý của việc sử dụng thông tin trong hệ thống.

Tuy nhiên việc mở rộng mô hình này lên phạm vi cả nước để các văn bản cấp và chứng thực tại Hà Nội có thể sử dụng trong các dịch vụ công tại Thành phố Hồ Chí Minh và ngược lại, đòi hỏi triển khai đồng bộ hệ thống tại cả hai địa điểm. Tốt nhất là có một chủ trương của chính phủ cho phép triển khai dịch vụ này trên phạm vi cả nước.

## 5. KẾT LUẬN

Hệ thống chứng thực văn bản điện tử đã được hoàn thiện về công nghệ. Nếu được ứng dụng đại trà sẽ tiết kiệm thời gian, công sức và giấy tờ cho công dân, sẽ là bước tiến mới cho Chính phủ điện tử tại Việt Nam, thậm chí có thể so sánh về mức độ tiên tiến so với thế giới. Tuy nhiên, để hệ thống này có thể thực sự phát huy hết tiềm năng, cần một chủ trương thống nhất của Chính phủ. Trước mắt hệ thống này có thể dùng ở quy mô các trường đại học, các văn phòng công chứng nhằm cung cấp các dịch vụ giấy tờ tiện lợi cho sinh viên và nhân dân.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Peri K. Blind (2007), “Building Trust in Government in Twenty First Century”, *7<sup>th</sup> Global Forum on Reinventing Government Building Trust in Government*, 26-29 June 2007, Vienna, Austria
2. Aiviet Nguyen (2007), “Public Information Network as Computing and E-Government Infrastructure in Developing Countries”, *Invited Talk at International Conference on “Managing Knowledge to build Trust in Government”*, organized by United Nations, Vienna.
3. Aiviet Nguyen et al. (2007), E-government Interoperability Overview, UNDP.
4. Aiviet Nguyen et al. (2007), E-government Interoperability Guide, UNDP.
5. Aiviet Nguyen et al. (2007), E-government Interoperability Standards, UNDP.
6. Nguyễn Ái Việt & Lương Thu Hà (2011), *Mô hình cơ quan điện tử ba cấp Hà Nội*.
7. Nguyễn Ái Việt et al. (2013), *Quy hoạch Quốc hội Điện tử*.
8. Kuriyan, R., & Ray, I. World Development (2009), doi:10.1016/j.worlddev.2009.03.005
9. <http://www.identogo.com/>

## THE SYSTEM OF LEGAL DOCUMENT VERIFICATION – A SOLUTION FOR PROMOTING E-GOVERNMENT

**Abstract:** *The article proposes a system of legal document verification allowing people and businesses to open an account to save all their legal documents after verified its legality. This system will connect with public services to verify these documents faster. It is considered as an effective solution aiming to enhance the process of administrative reform, heading towards an "E-government" to satisfy the requirements of macroadministrative management.*

**Keywords:** *System of verification, legal document, administrative reform, E-government*

## THỂ LỆ GỬI BÀI

1. *Tạp chí Khoa học* là ấn phẩm của Trường ĐH Thủ đô Hà Nội, công bố các công trình nghiên cứu và bài viết tổng quan trong nhiều lĩnh vực khoa học. Tạp chí được xuất bản định kì, mỗi số về một lĩnh vực cụ thể: Khoa học Xã hội và Giáo dục; Khoa học Tự nhiên và Công nghệ.
2. Tác giả có thể gửi toàn văn bản thảo bài báo cho Tổng biên tập, Phó Tổng biên tập hoặc biên tập viên theo địa chỉ email ghi ở dưới. Tất cả bản thảo bài báo gửi công bố đều được thẩm định về nội dung khoa học bởi các nhà khoa học chuyên ngành có uy tín. Tạp chí không nhận đăng các bài đã công bố trên các ấn phẩm khác và không trả lại bài nếu không được duyệt đăng. Tác giả bài báo chịu hoàn toàn trách nhiệm về pháp lí đối với nội dung kết quả nghiên cứu được đăng tải.
3. Bố cục bài báo cần được viết theo trình tự sau: *tóm tắt* (nêu ý tưởng và nội dung tóm tắt của bài báo); *mở đầu* (tổng quan tình hình nghiên cứu, tính thời sự của vấn đề, đặt vấn đề); *nội dung* (phương pháp, phương tiện, nội dung nghiên cứu đã thực hiện); *kết luận* (kết quả nghiên cứu, hướng nghiên cứu tiếp theo) và *tài liệu tham khảo*.

Bài báo toàn văn không dài quá 10 trang đánh máy trên khổ giấy A4, phông chữ Times New Roman (Unicode), cỡ chữ (Size) 12 thống nhất cho toàn bài, lề trái 3 cm, lề phải 2 cm, cách trên, cách dưới 2.5 cm, giãn dòng (Multiple) 1.25. Các thuật ngữ khoa học và đơn vị đo lường viết theo quy định hiện hành của Nhà nước; các công thức, hình vẽ cần được viết theo các ký hiệu thông dụng; tên hình vẽ đặt dưới hình, tên bảng, biểu đồ đặt trên bảng. Khuyến khích các bài sử dụng chương trình LaTeX với khoa học tự nhiên, công thức hóa học có thể dùng ACD/Chem Sketch hoặc Science Helper for Word. Bài báo phải có tóm tắt bằng tiếng Việt và tiếng Anh. *Tóm tắt* viết không quá 10 dòng. *Tóm tắt tiếng Việt* đặt sau tiêu đề bài báo và tên tác giả, *tóm tắt tiếng Anh* gồm cả tiêu đề bài báo đặt sau *tài liệu tham khảo*. Các tên nước ngoài được ghi bằng kí tự Latinh. Cuối bài có ghi rõ cơ quan công tác, số điện thoại, địa chỉ email của tác giả.

4. Phần *Tài liệu tham khảo* xếp theo thứ tự xuất hiện trong bài báo và sắp xếp theo mẫu dưới đây:
  1. John Steinbeck (1994), *Chùm nho phẫn nộ* (Phạm Thủy Ba dịch, tập 2), Nxb Hội nhà văn, H., tr.181.
  2. Bloom, Harold (2005), *Bloom's guides: John Steinbeck's The Grapes of Wrath*, New York: Chelsea House, pp.80-81.
  3. W.A Farag, V.H Quintana, G Lambert-Torres (1998), "A Genetic-Based Neuro-Fuzzy Approach to odelling and Control of Dynamical Systems", *IEEE Transactions on neural Networks Volume: 9 Issue: 5*, pp.756-767.

---

**Phòng Tạp chí - Trường Đại học Thủ đô Hà Nội**  
Số 98, Dương Quảng Hàm, Cầu Giấy, Hà Nội  
Tel: 04.3.767.1409; Fax: 04.3. 833.5426  
Email: tapchikhoahoc@daihocthudo.edu.vn